This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Astronomical
Observ.
QB
107
.P59

63837

IGNATIUS PICKEL

PROF. DER MATHEMAT. IN EICHSTAEDT

ABHANDLUNG

VON EINEM

SECUNDENPERPENDIKEL

EINER

ATSRONOMISCHEN UHR,

DESSEN LÆNGE VON DER WÆRME ODER KÆLTE KEINE VERÆNDERUNG LEIDET.

Mit 1. Kupfer.

ERFURT 1787.

bey GEORG ADAM KEYSER.

Reclassed 12-3-37 gfm

Abhandlung

von einem

Secundenperpendikel einer aſtronomiſchen Uhr,

deſſen Länge von der Wärme oder Kälte keine Veränderung leidet,

von

Ignatius Pickel

Prof. der Mathematik in Eichſtädt.

Vorgeleſen in der Kurmaynziſchen Academie nützlicher Wiſſenſchaften zu Erfurth, den 3ten April 1786.

Daſs es nothwendig ſey, an dem Perpendikel einer aſtronomiſchen Sekundenuhr eine Korrektion anzubringen, welche den Fehler verbeſſere, der ſicher entſtehet, wenn bey gröſſerer Wärme oder Kälte die metallene Stange länger oder kürzer wird, iſt durch beſtändige Erfahrung auſſer allen Zweifel geſezt. Was in dieſer Sache Harriſon und Caſſini geleiſtet haben, iſt bekannt; und

nebſt dieſen haben wir noch andere Methoden, welche zur nämlichen Abſicht dienen.

Da ich im Jahre 1775 ſchon zum drittenmal eine aſtronomiſche Uhr verfertigen lieſs, wollte ich dabey auf eine etwas neue Art einen Perpendikel anbringen, welcher unter folgenden Bedingniſſen ſeine ganze Länge unverändert beybehielte. 1. Er ſollte nur aus zween Stangen beſtehen, deren eine von Eiſen, die andere von Meſſing wäre. 2. Die ziemlich ſchwere Linſe ſollte gerad herab in der Mitte hangen, und auch nicht unten am Rande ſeiner Peripherie, ſondern in dem Mittelpunkte auffitzen. 3. Endlich ſollte ſich die Einrichtung auf ein jedes Verhältniſs der Ausdehnung der zweyen Metallen, auch nach der gänzlichen Verfertigung ſicher und leicht beſtimmen laſſen.

2. Ich hatte mir nicht ohne Urſache dieſe Punkte feſtgeſezt. Wenn ich einen aus der nämlichen Stange gezogenen Drath ausnehme, wird man nicht leicht von einem Metalle zwo oder mehr bekommen, die, nachdem ſie zugearbeitet, gehämmert, und wohl auch gar in dem Feuer ſind ausgeglühet worden, noch eine gleiche Ausdehnungskraft beſitzen. Ich wenigſtens habe das Widerſpiel nicht einmal erfahren. Es iſt auch zwiſchen Eiſen und Eiſen zwiſchen Meſſing und Meſſing ein groſer Unterſchied. Durch wiederholte Verſuche fand ich das Verhältniſs der Ausdehnung von Eiſen und Tyroler Meſſing wie 11 zu 18; aber von Sächſiſchen wie 18 zu 25. Es iſt aber ſehr nahe

$$11 : 18 = 74 : 121 .$$

$$18 : 25 = 74 : 103$$

Das erſte kommt mit der insgemein angenommenen 74 : 121 gänzlich überein; das andere aber iſt ſehr unterſchieden, und zeiget an, daſs ſich Sächſiſches Meſſing, das ich aus Nürnberg kommen lieſs, weniger, und faſt

nur

nur wie Kupfer ausdehne, wovon Muſſchenbroeck *) 310 fand, wenn Eiſen 230 hat; denn es iſt 23 : 31 = 74 : 99, 74.

Wenn die Linſe nicht in der Mitte der Stange hängt, iſt der Perpendikel der Gefahr des Wankens ſehr unterworfen, wovon ein ganz ungleicher Gang der Uhr entſtehet. Ich erfuhr dieſes an einer, bey der ich nach der Vorſchrift des Herrn le Paule **) die erſte Art des Caſſiniſchen Perpendikels anbrachte. Sie befindet ſich noch auf der Sternwarte zu Ingolſtadt.

Die Linſe ſelbſt iſt groſs, ſchwer, und insgemein mit Bley ausgegoſſen. Wenn ſie alſo nur an dem untern Rande vermittelſt einer Schraube feſtgehalten wird, bleibt ihr die ganze Freyheit, ſich in die Höhe auszudehnen, oder davon herab zu verkürzen. Dieſe Veränderung kann die angebrachte Korrektion groſſentheils vereiteln, weil ſo der Mittelpunkt der Schwere durch die ſtärkere Wirkung des Bleyes merklich verſetzet wird. Ich laſſe allezeit die Linſe in ihrem Mittelpunkte auffitzen, und ſo iſt daher nichts mehr zu fürchten.

Endlich eben deſshalben, weil nicht ſo richtig bekannt iſt, wie die zwo angebrachten Stangen ſich in ihrer Ausdehnungskraft gegen einander verhalten, muſs es noch bey dem ſchon verfertigten Perpendikel frey ſtehen, die ihr angemeſſene Vorrichtung anzubringen. Es muſs auch eben dieſe noch insgemein dieſes Verhältniſs überſteigen, weil die ſtählerne Feder, an welcher der Perpendikel hänget, und was noch ſonſt übrig iſt, nicht auſſer Acht darf gelaſſen werden.

3. Dieſe Vortheile hofte ich durch einen Perpendikel zu erhalten, deſſen Beſchreibung ich zum Stoffe dieſer kleinen Abhandlung gewählet habe.

*) Tentamina Experimentorum in Academia del Cimento cum additionibus Petri van Muſſchenbroeck.

**) Traité d'Horlogerie par Mr. I. A. le Paule Horloger du Roy. A Paris, chez Jacques Chardon 1760.

Fig. I ſtellet ihn vor ohne dem gehörigen Verhältniſſe der Theile, weil ſie zu klein ausfielen; und von der Stange ſind nur die beyden Ende wegen ihrer Länge gezeichnet. LM iſt die ſtählerne Schwungfeder, an welcher der Perpendikel hängt, und wo er auch kann aufgeſchraubet, oder niedergelaſſen werden. Sie iſt 1 Zoll 10 Linien lang nach dem Pariſer Schuh, in welchen ich durch dieſe ganze Abhandlung alle Gröſen anſetze. NNN iſt die meſſingene Regel 29 u. 3viertel Zoll lang, faſt einen breit und eine Linie dick. Aber unten bey N N erſtreckt ſich eine verzierte Ausſchweifung beynahe auf 3 Zolle. Hinter dieſer befindet ſich eine gleich lange, und durchaus gleich breite eiſerne, welche oben bey M mit 3 Schrauben an ſie befeſtiget iſt, und damit dieſe Regeln ſich nicht biegen, oder auseinder ziehen, ſind in gleichen Abtheilungen drey Schrauben o o angebracht, die durch länglichte Löcher der meſſingenen paſſen, damit ſich beyde insbeſondere zwar frey nach der Länge verſchieben, nicht aber auseinander geben können. Stählerne Vorlegblättchen verdecken die Löcher. Am Ende der eiſernen bey C hängt an einem gemeinſchaftlichen wohl abgedrehten und polirten Nagel, ein doppelter ſtählerner oder eiſerner ziemlich ſtarker gebogener Hebel A C E und B C D. Der Winkel A C E = B C D hat 135°, und alſo iſt A C D = B C E = 45°, wenn A C und B C in einer geraden Linie liegen. Bey N und N ſind an die meſſingne Regel zween kurze mit einer ſtumpfen und abgerundeten Schneide verſehene Unterſätze angeſteckt, die ſich frey verſchieben laſſen, und vermittelſt welcher ſie auf die Hebelarme A C und B C auffizt. Ein jedes Ende D und E der ſchraegen Arme C D und C E iſt mit gleichlangen und eben ſo ſtarken Armen D F und E F verbunden, welche ſowohl in F, als D und E, um ſtählerne polirte Nägel leicht beweglich ſind. Es iſt alſo C D E F ein ordentliches Quadrat, wenn A B eine gerade Line iſt: ſonſt aber verwandelt es ſich in einen Rhombus. Eine jede Seite iſt gegen 14,75 Linien lang Eben bey F an dem nämlichen Nagel hängt eine eiſerne dort etwas gekrümmte Regel F K, an welche unten bey K ein Schraubengewind angeſchnitten iſt. Oben bey F erſtreckt ſie ſich hinter

dem

dem Quadrate auf etwan 6 Zolle in die Höhe, und paſſet frey durch einen rückwärts an der obern eiſernen Regel angebrachten Kloben, nur zu dieſer Abſicht, daſs FK um den Nagel bey F nicht wanken könne. Nun an dieſe Regel iſt die Linſe GI angeſchoben, und zugleich eine meſſingene Hülſe KH angeſteckt, auf welcher bey H in ſeinem Mittelpunkte die Linſe auffizt, deſſen flaches Loch alſo bey HI weiter iſt, als bey GH. Die vorgelegte Schraubenmutter K trägt dieſe angeſezte Stücke. Die ganze Länge FK macht etwas über 12, 5, und KH 9 Zolle aus. Davon hat GI faſt 7. Die Linſe ſelbſt iſt ein Abſchnitt einer Kugel von einem Schuh im Durchmeſſer Die polirten meſſingenen Schalen ſind mit Bley ausgegoſſen, und wiegen etwas über 10 Pfund, der ganze Perpendikel aber iſt 13 ſchwer, nach dem Nürnberger Gewichte. Er macht ein ſchönes und zierliches Anſehen weil faſt nichts als wohlpolirtes Meſſing mit der ſtählernen Hebeleinrichtung in das Geſicht fällt.

4. Man ſiehet ſchon aus dieſer kurzen Beſchreibung die Verrichtung des Perpendikels ein. Die ſchwere Linſe drückt die horizontalen Hebelarme, wie ich ſie Kürze halber nenne, an die Unterſätze der meſſingnen Regel feſt an; und ſo iſt alles in einer unbeweglichen Verbindung aneinander angeſchloſſen Wenn aber eine gröſsere Wärme einfällt, verlängert ſich die hintere eiſerne Regel, und mit ihr ſenkt ſich die Linſe mit der Hebeleinrichtung herab. Zugleich aber verlängert ſich die meſſingne noch mehr, druckt, weil ſie oben an die eiſerne angeſchloſſen iſt, die horizontalen Hebelarme tiefer herab, hebt dadurch die Punkte D und E und den damit verbundenen F ſammt der ganzen Linſe und untern Regel. Zugleich auch dehnet ſich die meſſingne Hülſe K H in die Höhe aus, und erhebt ebenfalls ſo viel den Mittelpunkte der Linſe, als ihn die eiſerne FK, oder vielmehr die ganze Länge CK herabgelaſſen hatte.

Im widrigen Falle einer gröſsern Kälte geſchiehet das Widerſpiel. Meſſing wird mehr als Eiſen verkürzet; die Punkte A und B ſteigen mehr in die

Höhe,

Höhe, und dadurch sinket F sammt der Linse, welche ebenfalls die verkürzte Hülse KH so viel herabläßt, als sie durch gleiche Wirkung der längern eisernen FK und des Quadrats CF gehoben wurde. Es wird nämlich von einer gröſsern Wärme der senkrechte Durchmesser CF kürzer als der horizontale DE; von einer gröſsern Kälte aber länger als dieser. Es korrigirt die messingne Hülse H K den untern Theil des Perpendikels von der Hebelanrichtung bis zur Schraubenmutter K; und jene den obern Theil mit Einschlusse der stählernen Schwungfeder L M.

5. Es ist also die Hauptfrage zu beantworten, was AC zu CD, oder CB zu CE für ein Verhältniſs haben solle, daſs der Punkt F, und die ganze Länge LF in einem jeden Falle unverändert bleibe. Zugleich auch muſs bestimmt werden die Länge von CK und HK, damit eine jede eine gleichgroſse Veränderung leide. Daſs man bey dieser Verfertigung des Perpendikels ein jedes den zweyen Metallen angemessenes Verhältniſs ganz leicht erhalten könne, ist daher schon richtig, weil sich die Untersätze der messingnen Regel frey gegen C verschieben oder wegrücken lassen. Im ersten Falle wird die Korrecktion, die von ihr entstehet, gröſser: im zweyten aber kleiner.

Es stelle Fig. 2 und 3 mit ausgezogenen Linien die Hebelanrichtung auf einen mittelmäſsigen Grad der Wärme vor, in welchem ACB eine gerade Linie und CEFD ein Quadrat ist. Nun werde die eiserne Regel von einer gröſsern Kälte (Fig. 2) um Ce, die messingne um Cm kürzer; oder von einer gröſsern Wärme (Fig. 3) um eben so viel länger; so kommen die Hebelarme ACE, und BCD in eine andere Lage ace und bce, und wenn die Untersätze A und B in gehöriger Entfernung von C stehen, wird von dem in einen Rhombus ceFd verwandelten Quadrate der Punkt F unverändert bleiben. Stünde aber A und B zu nahe bey C, würden die horizontalen Arme (Fig. 2) zu hoch steigen, die schraegen sich mehr gegen CF neigen, und der Punkt F zu tief kommen, oder (Fig. 3) es würden die ersten zu tief herabgedrückt,

drükt, die lezten zu viel erhoben, und auch mit ihnen der Punkt F, Die gegenſeitige Wirkung entſteht, wenn CA und CB zu lang ſind.

Es ſeyn aber A und B in gehöriger Stelle, und man verlängere CD und cd (wenn es nöthig iſt) bis ſie in y zuſammenlaufen. Ziehe auch nebſt den Diagonalen CF, ED und ed die Linie ab = AB, welche zugleich mit dieſer parallel, und auf mF perpendikulär iſt. Weil cF in g und CF in Cc halbirt ſind, iſt Cc = 1/2 Gg. Es iſt auch der Winkel Cyc = cbm = cam. Denn wie ſeine Lage der Arm BC oder CA verändert, ſo verändert ſie auch der mit ihm verbundene CD oder CE. Der Winkel ACE = ace, oder BCD = bcd hat allezeit 135 Grade, und ACD oder BCE 45. Die Beſtimmung des Winkels Cyc = cam löſet die Aufgabe auf. Denn ſo wird aus cm und den Winkeln in dem rechtwinklichten Dreyecke cam die ſenkrechte am = AC bekannt, und alſo das Verhältniſs zu der unveränderten CD.

6. Es ſey alſo Cm : Cc = a : f, oder Cm = a, Cc = f und cm = a − f. Wenn hernach CD = cd = 1, ſo iſt im Quadrate CEFD die Diagonal CF = $\sqrt{2}$, und die halbe CG = 1/2 $\sqrt{2}$. Und weil Gg = 1/2 Cc = 1/2 f, ſo iſt (Fig. 2 und 3)

$$cg = \left\{ \begin{matrix} 1/2\,Cc + CG \\ -1/2\,Cc + CG \end{matrix} \right\} = \pm 1/2\,f + 1/2\sqrt{2} = \frac{\pm f + \sqrt{2}}{2}.$$

Aus cd = 1, und $cg = \frac{\pm f + \sqrt{2}}{2}$ findet man dg. Denn weil dg = cd − cg

$$= 1 - \frac{f^2 \pm 2f\sqrt{2} + 2}{4} = \frac{2 - f^2 \mp 2f\sqrt{2}}{4}, \text{ ſo iſt } dg = 1/2\sqrt{2 - f^2 \mp 2f\sqrt{2}}$$

Wenn also der Winkel g c d $= \phi$, so ist tang $\phi = \frac{dg}{cg} = \frac{\pm 1/2\sqrt{2 - f^2 \mp 2f\sqrt{2}}}{\pm 1/2\, f + 1/2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2 - f^2 \mp 2f\sqrt{2}}}{\pm f + \sqrt{2}}$ Von dem doppelten Zeichen gehört allezeit das obere auf Fig. 2 und das untere auf Fig. 3.

Der Winkel DCG $= 45°$ ist bey Fig. 2 $=$ ged $+$ Cyc $= \phi +$ cyc; bey Fig 3 aber ist ged $= \phi' =$ DCG $+$ Cyc $= 45° +$ cyc. Also ist für beyde Fälle Cyc $=$ cam $= \pm 45 \mp \phi$. Der andere acm macht mit diesem $90°$; folglich wird acm $= 90° -$ cam $= 45° + \phi$ (Fig. 2) $= 90° + 45° - \phi = 135° - \phi$ (Fig. 3).

In dem rechtwinklichten Dreyecke cam sind also nebst der Seite cm $= s - f$ alle Winkel bekannt, und es ist die gesuchte

$$ma = CA = cm \times \begin{cases} \text{tang. } (45° + \phi) & \text{Fig. 2} \\ \text{tang. } (135° - \phi) & \text{Fig. 3} \end{cases}$$

7. Diese Formel in eine tauglichere zu verwandeln, nehme ich aus der Trigonometrie als bekannt an, dass, wenn ein Winkel $= y$, der andere $= z$, so ist

$$\text{tang. } (y + z) = \frac{\text{Tang. } y + \text{ tang. } z}{1 - \text{tang. } y \times \text{tang. } z}$$

$$\text{tang. } (y - z) = \frac{\text{tang. } y - \text{ tang. } z}{1 + \text{tang. } y \times \text{ tang. } z}$$

In dieſem Falle iſt $y = 45^\circ$, und alſo tang y = tang $45^\circ = 1$. Eben ſo iſt auch tang 135° = tang $180^\circ - 135^\circ$ = tang $45^\circ = 1$. Nur muſs er, wegen der gegenſeitigen Lage des Tangenten eines ſtumpfen Winkels als negativ angenommen werden. Wird nun die Anwendung auf die für CA gefundene Formel gemacht, in welcher $\varphi = z$, und 45° oder $135^\circ = y$, ſo iſt

$$ma = CA = cm \begin{cases} \dfrac{1 + \text{Tang } \varphi}{1 - \text{Tang. } \varphi} & \text{Fig. 2} \\ \dfrac{-1 - \text{Tang. } \varphi}{1 - \text{Tang. } \varphi} = \dfrac{1 + \text{Tang } \varphi}{\text{Tang. } \varphi - 1} & \text{Fig. 3} \end{cases}$$

Die zweyte Formel für Fig. 3 iſt poſitiv wie die erſte. Denn weil in dieſem Falle der Winkel $\varphi > 45^\circ$. iſt auch Tang $\varphi >$ [illegible] alſo tang. $\varphi - 1$ eine poſitive Gröſse. Uebrigens hat der negative Tangent von 135 hier nichts anders zu bedeuten, als daſs ſowohl cm als ma eine gegenſeitige Lage in Betracht des erſten Falles haben, welches aus der Natur dieſer Aufgabe richtig iſt.

8. Man hat alſo das verlangte Verhältnis von CA zu CD, welches iſt

$$cm \; x \frac{1 + \text{Tang. } \varphi}{\pm 1 \mp \text{Tang. } \varphi} : 1 \text{ oder}$$

$$cm \; x \; (1 + \text{Tang. } \varphi) : \pm 1 \mp \text{Tang. } \varphi$$

Nämlich die Länge des Horizontalen Hebelarms CA verhält ſich zur Länge des ſchrägen CD, wie cm die Differenz der Verkürzung oder Verlän-

gerung der metallenen Stangen multiplicirt mit der Summe der Tangenten der Winkel DCG und dcg, welche der schräge Arm mit der Verticallinie macht, da die horizontalen Arme eine gerade Linie ausmachten, und hernach davon abgiengen: zur Differenz der Tangenten eben dieser Winkel.

9. Wenn $cm = a \pm f$, und $\text{Tang.}\,\phi = \frac{\mp f + \sqrt{2 - f^2} \mp 2f\sqrt{2}}{\pm f + \sqrt{2}}$ gemacht wird, hat man die zur Berechnung eingerichtete Formel

$$CA = a - f\,x\,\frac{\mp f + \sqrt{2} + \sqrt{2 - f^2} \mp 2f\sqrt{2}}{f \pm \sqrt{2} + \sqrt{(2 - f^2} \mp 2f\sqrt{2})}$$

10. Sie kann aber für die gegenwärtige Aufgabe weit einfacher und bequemer gemacht werden. Wenn in einer binomischen Grösse $a + x$ ein Theil x im Vergleiche des andern a sehr klein ist, so kann für das wahre Quadrat $a \pm 2ax + x^2$ ohne beträchtlichen Fehler $a \pm 2ax$ angenommen werden. Ja wenn auch um $2x$ das vorige vermindert wurde, so dürfte man dennoch $a \pm 2ax + x^2 = a \pm 2ax - x^2$ machen, und besonders die Wurzel für beyde $= a \pm x$ ohne merklichen Fehler insgemein ansetzen.

Es ist wirklich $f = Cc$ gegen den Durchmesser $CF = \sqrt{2}$ allezeit in unsern Falle sehr klein. So ist also sehr nahe $2 \mp 2f\sqrt{2 - f^2} = 2 \mp 2f\sqrt{2 + f^2}$, und für beyde die Wurzel $= \sqrt{2} \mp f$, bey welcher sich erst in der fünften Decimalstelle eine Differenz äussert, wenn $f = 0{,}01$, und

bey

bey $f = 0$, ſo ſind die erſten ſechs ganz einander gleich. Auf ſolche Art verwandelt ſich die vorige Formel in dieſe ſehr einfache

$$CA = \overline{a - f}\, x \frac{\mp f + \sqrt{2} + \sqrt{2 \mp f}}{f \mp \sqrt{2} \mp (\sqrt{2} \mp f)} = \overline{a - f}\, x \frac{2\sqrt{2}}{f \mp \sqrt{2} \mp \sqrt{2} + f}$$

$$= \overline{a - f}\, x \frac{2\sqrt{2}}{2f} = \frac{a - f}{f} \times \sqrt{2}$$

Und alſo iſt $CA : CD = \frac{a-f}{f} \times \sqrt{2} : 1 = \overline{a - f} \times \sqrt{2} : f$

oder $CA : CD = cm \times CF : Cc$

Das iſt, der Horizontale Arm CA verhält ſich zum ſchregen CD, wie das Produkt der Quadratwurzel von 2 in die Differenz der Veränderung der Metalle, zur Veränderung desjenigen, welches ſich in der Kälte weniger zuſammenziehet, oder in der Wärme minder verlängert.

VI. Ich will aber dennoch nach der erſten Formel dieſes Verhältniß auf verſchiedene Grade der Wärme oder Kälte von der gröſsten bis zur mittlern berechnen. Es wird in unſerer Gegend auch in dem wärmſten Sommer das reaumuriſche Thermometer nicht über 20 bis 22 Grade über den Gefrierungspunkt ſteigen, und auch unter dieſen in einem ſehr kalten Zimmer nicht über 8 bis 10 Grade im kälteſten Winter herabfallen. Ich bin davon durch eine ſichere Erfahrung vieler Jahre überzeugt, da ich allezeit dreymal des Tages den Stand des Thermometers, welches neben der Uhr hanget, aufſchreibe. So beläuft ſich alſo die gröſste Veränderung zwiſchen Winter und Sommer beynahe auf 30 Grade. Eben ſo viel giebt Herr De la Lande an *), und ſetzt

*) Aſtronomie par M. de la Lande ſeconde édition Tome ſecond, n. 2462.

dafür einen Fehler von 20″ bey einer astronomischen Uhr, wenn der Perpendikel nur aus einer eisernen Stange bestehet. So eine Veränderung des Ganges erfodert bey einem einfachen Pendel, welches 440, 57 Linien lang ist, eine Verlängerung oder Verkürzung von 1/5 oder genauer 0, 204 einer Linie.

Wenn also CD = 14, 75 oder glatterdings = 15 Lin. weil dieser Arm nicht zu lang seyn darf, so ist auf das höchste CD : Cc = 15 : 0, 204 = 1 : 0,0136; und wenn ich dafür setze 1 : 0,02, so dürfte CD nicht mehr als 10, 2 Lin. lang seyn, welches schon wenig ist, und ich wollte nicht einrathen, diesen Arm kleiner zu machen.

Der Werth 0,02, wie ich ihn zum höchsten annehme, bewirket also die ganze Verwandlung der 2ten Figur in die 3te; und wenn bey einem mittlern Grade der Wärme, welcher ist gegen fünf oder 6 über 0, die horizontalen Arme nach einer geraden Linie liegen, ist $Cc = f = 0,01$, $f^2 = 0,0001$, wenn $CD = 1$.

Nimmt man das Verhältniss an, $Cc : Cm = 74 : 121$, so ist $Cm = a = \frac{1,21}{74} = \frac{121}{7400}$ und $cm = a - f = \frac{47}{7400}$ bekanntermassen ist $\sqrt{2} = 1,4142135623$ &c. und also $2f\sqrt{2} = 0,02828427\,12$. Wenn diese Werthe in der allgemeinen Formel bey n. 9 gesezt werden, kommt folgendes heraus.

Für den Fall in Fig. 2.

$$\sqrt{2 - f^2 - 2f\sqrt{2}} = 1,404143 \quad | \quad \ldots\ldots - 1,404142$$
$$f + \sqrt{2} = 1,424213 \quad | \quad \ldots\ldots + 1,424213$$
$$2,828356 \quad | \quad \ldots\ldots \quad 0,020071$$

Die

Die erste Summe mit $\frac{47}{7400}$ multiplicirt, wird $= 0,01796388$. Also ist

$$CA : CD = \frac{0,01796388}{0,020071} : 1 = 89501 : 100000$$

Für den Fall in Fig. 3.

$$\sqrt{2f^2 + 2f\sqrt{2}} = 1,424143 \qquad f - \sqrt{2} + 1,424143$$
$$-f + \sqrt{2} = \underline{1,404213} \qquad f - \sqrt{2} - \underline{1,404213}$$
$$2,828356 \qquad 0,019930$$

Die Multiplication giebt das nämliche. So ist:

$$CA : CD = \frac{0,01796388}{0,01993} : 1 = 90134 : 100000.$$

Wäre die Berechnung mit der kürzern Formel (n. 10.) angestellet worden, welche keinen Unterschied zwischen den beyden Fällen angiebt, hätte man beynahe das Mittel zwischen den vorigen Verhältnissen erhalten. Dieses ist 89818 : 100000, und aus $z - f \times \sqrt{z} : f$ wird 89822 : 100000.

Damit auch der Winkel $cam = Cyc$, und der andere $dcg = \phi$ bekannt werde, darf nur $cm = \frac{47}{7400}$ durch $am = CA$ getheilt werden, aber so, daß $CD = 1$ sey.

$\text{Log } \frac{47}{7400} = 7,8028662$ Fig. 2

$CA = 0,89501 = 9,9518279$
$\text{L. T. } cam = 7,8510383 = 0^\circ 24' 23'' = Cyc$
Also ist der Winkel $\phi = 44\ 35\ 37 = dcg$

CA =

Fig. 3

$CA = 0,90134 = 7,8028662 + 9,9548886$

$7,8479776 = 0^{\circ}\ 24'\ 13'' = Cyc$

und der Winkel $\varphi = 45.\ 24\ 13 = dcg$

Fig. 2 und 3

$CA = 0,89822 = 7,8028662 + 9,9533827$

$7,8494835 = 0.\ 24.\ 18 = Cyc$

und der Winkel φ im Mittel $= 45^{\circ} + 24'\ 18'' = dcg$

12. Bey einem jeden dieſer äuſſerſten Fälle verändert ſich auf einen Tag der Gang der Uhr um 10″, und das Thermometer giebt 20 bis 22 Grade oder 8 bis 10 unter 0 an. Wenn alles im Mittel wird ausgeſchlagen erfodert den tägliche Fehler einer Secund auf der Uhr, welchen eine Veränderung von anderthalb Graden des Thermometers hervorbringt, daſs $Cc = 0,001$ CD werde, und CA von ihrer vorigen Lage um 2′ 26″ abweiche. Ich habe alles genau berechnet, und es in beygeſezte Tafel eingetragen, damit man auf einmal vom gröſsten bis zum kleinſten alle Veränderungen der Hebelanrichtung einſehen könne.

$Cc = f$

Cc = f wenn CD = 1	Auf die Fälle von Fig. 2 und 3.		
	Verhältniſs von CA : CD	Winkel cam = Cyc	Winkel φ = dcg
0, 01	0, 89501 : 1	0° . 24′ . 23″	44° . 35′ . 37″
	0, 90134 : 1	0 . 24 . 13	45 . 24 . 13
0, 009	0, 89536 : 1	0 . 21 . 57	44 . 38 . 3
	0, 90105 : 1	0 . 21 . 49	45 . 21 . 49
0, 008	0, 89568 : 1	0 . 19 . 30	44 . 40 . 30
	0, 90073 : 1	0 . 19 . 24	45 . 19 . 24
0, 007	0, 89603 : 1	0 . 17 . 3	44 . 42 . 57
	0, 90039 : 1	0 . 16 . 59	45 . 16 . 59
0, 006	0, 89634 : 1	0 . 14 . 37	44 . 45 . 23
	0, 90008 : 1	0 . 14 . 33	45 . 14 . 33
0, 005	0, 89669 : 1	0 . 12 . 19	44 . 47 . 59
	0, 89974 : 1	0 . 12 . 8	45 . 12 . 8
0, 004	0, 89698 : 1	0 . 9 . 44	44 . 50 . 16
	0, 89945 : 1	0 . 9 . 42	45 . 9 . 42
0, 003	0, 89722 : 1	0 . 7 . 18	44 . 52 . 42
	0, 89911 : 1	0 . 7 . 17	45 . 7 . 17
0, 002	0, 89777 : 1	0 . 4 . 52	44 . 55 . 8
	0, 89856 : 1	0 . 4 . 52	45 . 4 . 52
0, 001	0, 89822 : 1	0 . 2 . 26	44 . 57 . 34
	0, 89822 : 1	0 . 2 . 26	45 . 2 . 26

13. *Anmerkung.* 1. Die Punkte A und B (Fig. 1. 2 und 3) wo die Unterſätze oder Füſse der meſſingenen Regel aufſtehen, ſind eigentlich veränderliche Punkte, weil eine jede Abänderung an der Länge der metallenen Stangen zur vollſtändigen Korrektion des Fehlers ein beſonderes Verhältniſs von CA zu CD erfordert, und zwar ein anders für die Verkürzung, und abermal ein anders für die gleichgroſse Verlängerung. Der Unterſchied liegt in der berechneten Tafel vor Augen, und iſt aus der Formel von tang. Φ (n. 9.) bewieſen. Denn dieſe kann unmöglich ein immer gleiches Verhältniſs geben, wenn nicht, wie ich n. 10 beynahe als wahr angenommen habe. $\sqrt{2-f^2} \mp 2f\sqrt{2} = \sqrt{2} \mp f$, welches niemals geſchehen kann, wenn nicht $f = 0$ iſt, für welchen Falle die ganze Anrichtung unnöthig wäre. Daſs aber dennoch das Verhältniſs von CA : CD = 0, 89822 : 1 als unverändert, und die verkürzte Formel bey n. 10, welche dieſes angiebt, in der Ausübung als richtig könne angenommen werden, beweiſe ich alſo.

Für den gröſsten Werth von $f = 0,01$, und $cm = \frac{47}{7400}$ mache man $ma = CA = 0,89822$, und berechne daraus den Winkel $cam = Cyc$. Er iſt = 24′, 18″, 4, und alſo (Fig. 2.) $dcg = \Phi = 44°, 35′, 41″, 6$, und (Fig. 3.) = 45 , 24′, 18″, 4. Nun wenn CD = cd = 1, ſo iſt (Fig. 2.) cF der doppelte Coſinus, oder (Fig. 3.) der doppelte Sinus dieſes Winkels. Davon ziehe man ab, im erſten Falle Cc = 0, 01, oder ſetze es im zweyten hinzu, ſo ſoll der Reſt, oder die Summe der Quadratwurzel von 2 oder CF gleich ſeyn. Der erhaltene Unterſchied iſt der noch übrig gebliebene Fehler, welchen dieſes noch unrichtige Verhältniſs nicht gehoben hat. Hier ſind die Produkte dieſer Rechnung.

Doppel-

Doppelter Coſinus von 44°. 35′. 41″, 6 = 1, 424177
— Cc = 0, 01
1, 414177
√ 2 — = 1, 414213
Unterſchied = 0, 000036

Dieſer zeiget an, wie viel bey Fig. 2. der Punkt F noch zu hoch ſtehe.

Doppelter Sinus von 44°. 35′. 41″, 6 = 1, 404179
+ Cc = 0, 01
1, 414179
√ 2 = 1, 414213
Unterſchied = 0, 000034

Um ſo viel ſolte F bey Fig. 3 noch tiefer herabgelaſſen ſeyn.

Wie viel dieſe Fehler ausmachen, wird leicht gefunden, wenn man ſagt, Cc = 0, 01 verändert den Gang der Uhr um 10″ des Tags; wie viel verändert ihn 0,000036, oder 0, 000034? nämlich um 0″,036 im höchſten Winter, und 0, 034 im höchſten Sommer. Es würde erſt in 30 Tägen, wenn ſo lange die gröſte Wärme oder Kälte unverändert anhalten ſolte, die Uhr beynahe um 1″ zu früh gehen. Ich glaube der ſtrengſte Aſtronom, welcher ſich ſo lange Zeit bis auf eine Secunde damit verſichern könnte, würde allerdings damit zufrieden ſeyn.

14. *Anmerkung II.* Es iſt keineswegs bewieſen, daſs, wenn auch die Abänderung der Wärme und Kälte noch ſo verſchieden iſt, dennoch immer das nämliche Verhältniſs verbleibe, nach welchen ſich zwey Metalle verlängern oder verkürzen. Vielmehr iſt das Widerſpiel durch die Erfahrung rich-

tig, welche mit stark erhizten Metallen ist angestellt worden. Man darf nur Musschenbroecks Experimente mit einander vergleichen, eine überzeugende Probe davon zu haben. Ob aber diese Ungleichheit schon merklich sey, bey einer Abänderung von 30 Graden des Thermometers, der ein ungeheiztes Zimmer ausgesetzet ist, können fast nur gute astronomische Uhren, welche mit so zusammengesezten Perpendikeln versehen sind, richtig entscheiden. Der bekannte Harrisonische mit 9 Stangen, der ohne Hebelanrichtung durch die 4 messingene, gerade so viel die 5 eisenen in die Höhe erhebt, oder davon herabläst, als sie sich durch die Wärme verlängert, oder durch die Kälte verkürzet hatten, sollte vor andern den Schiedrichter machen. Nach dem Zeugniss des Herrn de la Lande, in der schon angezogenen Stelle *), ist der Ausspruch vollkommen günstig, und man darf gemäss der Erfahrung, dieses Verhältniss als unverändert annehmen.

Ich will aber dennoch untersuchen wie der Fehler bey meinem Perpendikel beschaffen sey, wenn allenfalls daher einer entstünde, und ihn hernach mit dem Harrisonischen vergleichen. Es sey (Fig. 2.) das Verhältniss Cc zu Cm angenommen, darnach ma = CA bestimmt, und der Untersatz der messingenen Regel in A versetzet worden. Nun aber äusert sich ein ander Cc zu Cp; und da man pq mit ma parallel macht, welche ca in r schneidet (die, wenn p oder m fiele, müsste verlängert werden), sollte diese Regel, die ihre Länge nur um Cp = Sr, nicht aber um Cm = Aa verändert hat, in r aufsitzen. Weil aber dieses in q geschiehet, wo pq = ma, so ziehe man cq, welche die Versetzung des horizontalen Arms von CA in cq vorstellet, da doch nach cr kommen sollte. Es sind also die schregen Arme ce und cd nicht

*) Er schreibt also n. 2462, da er von den Harrisonischen Perpendikeln handelt, welche an viele Uhren Englands und Frankreichs sind angebracht worden. „Elles réussissent de la manière la plus complette" und n. 2465. „Les Astronomes d'Angleterre m'ont assuré plusieurs fois qu'on faisoit par ce moyen des Horloges à pendule qui ne varioient pas de plus de 5″ par année"

nicht genug gegen CF geneigt, und der Punkt F ſtehet etwas zu hoch in E. der Fehler wird, wie bey n. 14. berechnet.

Es iſt $pq = am = \frac{cm \times \sqrt{2}}{Cc} = 0{,}89822$, und auch ep bekannt. Denn es ſey das neue Verhältniſs Cc : Cp = 74 : 118, ſo iſt $ep = \frac{44}{7400}$ wenn Cc = 0,01. Berechnet man aus dieſen den Winkel cqp = 22′. 45″, 4, ſo hat man auch dcg, und das Complement cdg = 45°. 22′. 45″, 4. Der um Cc = 0,01 verminderte doppelte Sinus dieſes Winkels iſt 1,413544 welcher gegen $\sqrt{2}$ = 1,414213 um 0,000669 = Ff zu klein iſt. Es ſollte alſo die Uhr um 0″,669 auf einen Tag zu früh gehen, weil Cc = 0,01 ihren Gang um 10 Secunden verändert.

Bey dem Harriſoniſchen Perpendikel, wenn die Länge der Stangen nach dem Verhältniſſe 74 : 121 eingerichtet iſt, haben die zwo eiſenen auf einer Seite, ſammt der mittlern gegen 1297 Linien. Wenn ſich alſo 440,57 (n. 11.) um 0,102 verkürzen oder verlängern, macht dieſes 0,800279 bey 1297 aus, und eben auch ſo viel bey den zween meſſingenen. Wenn aber bey dieſen das Verhältniſs von 121 zu 118 gekommen iſt, leiſten ſie nicht mehr ſo viel ſondern nur 0,292834. Die Differenz 0,007445 iſt der übrig gebliebene Fehler = 0″,73 nach der Zeit, um 0″,061 gröſer gegen den vorigen. Wenn alſo das Zeugniſs von Herrn de la Lande und den engliſchen Aſtronomen, wie ich nicht zweifle, richtig iſt, muſs ſo eine Abänderung des Verhältniſſes nicht vorkommen, oder bey dem von mir verfertigten Perpendikel weniger, als bey dem Harriſoniſchen zu fürchten ſeyn.

15. *Anmerk.* III. Es iſt noch ein kleiner Zweifel zu beantworten übrig. Bey einem mittlern Stande des Thermometers ſollen die Hebelarme CA und CB eine gerade Linie ausmachen. Wie iſt aber dieſes von dem Künſtler zu erwarten, und wird er wohl bey der Zuſammenfügung auf das Thermometer

mometer ſehen, und nach dieſem die Wärme ſeiner Werkſtube mäſsigen? nein, das wäre ganz unnöthig. Er macht anfangs die Unterſätze etwas höher, fügt den Perpendikel zuſammen, und hängt unten ein Gewicht an. Da er hernach ein gerades Linial über A B legt, wird ſich bald zeigen, ob der Punkt C zu hoch oder zu tief ſtehe, wenn jenes nicht durchaus aufliegt. Die etwas verkürzte Unterſätze heben den Fehler. Sie laſſen ſich hernach frey hin und her ſchieben, ohne Bewegung der Hebelanrichtung, wenn nur die untere horizontale Fläche der meſſingenen Regel auf ihre Länge perpendiculär, und alſo mit A B parallel iſt. Das Zimmer wird juſt eben nicht den höchſten Grad der Wärme haben, ſonſt könnte er dieſe Arbeit auf einige Stunden verſchieben. Ob hernach das Thermometer 6 bis 8 Grade oder o angebe, oder nicht, an dem iſt wenig gelegen. Nur folgt daraus, daſs für die äuſerſten Fälle in Fig. 2 und 3 nicht beyderſeits C c gleich groſs ſey. Das hat aber nichts zu bedeuten. Man ſehe nur die Tafel ein bey n. 12. Bis auf eine unbeträchtliche Kleinigkeit ſind in ſelber die Winkel c a m mit dem Werthen von C c in einem gleichen Verhältniſſe: denn wie die lezten, ſo nehmen auch die erſten in einer arithmetiſchen Progreſſion ab.

Ich gebe aber wieder das gröſste zu, welches kaum geſchehen wird, und ſetze, A C B ſey eine gerade Linie, da eben die Wärme des Zimmers auf das höchſte geſtiegen iſt. So wird alſo der Fall von Fig. 3 niemals vorkommen, und C c kann bis auf 0,02 anwachſen, da $cm = \frac{47}{3700}$ wird. Aus dieſen, und C A = 0, 89822 im Mittel nach der Formel n. 10 finde ich den Winkel $cam = 0^{\circ}. 48'. 36'', 8$, welcher genau noch ſo groſs iſt, als ihn (n. 13.) C c = 0,01 g a b. Nun berechne man, wie dort, den Fehler aus den um 0,02 verminderten doppelten Sinus von $cdg = 45^{\circ}. 48'. 36'', 8$. Man bekommt 0,000143, welcher auf einen Tag in der Zeit, nur 0″,143 ausmacht. Es iſt alſo richtig, daſs auch die äuſerſte Unachtſamkeit eines Künſtlers bey dieſem Perpendikel keinen merklichen Fehler auf die Uhr bringen könne, wenn nur ſonſt alles fleiſsig ausgearbeitet iſt.

16. Nach-

16. Nachdem ich die Hebeleinrichtung vollſtändig, wie ich glaube, erklärt habe, iſt noch eine andere Korrektion übrig, die unter ihr bey der Linſe angebracht, und ſchon anfangs n. 3 und 4 iſt beſchrieben worden. Das über die eiſene Regel CK (Fig. 1.) geſteckte meſſingene Rohr KH ſoll den Mittelpunkt der Linſe in einem unveränderten Abſtande von C erhalten. Dieſes wird nur geſchehen, wenn KH um ſo viel kleiner iſt, als CK, um wie viel ſich das Eiſen weniger verlängert oder verkürzet, als das Meſſing. Nämlich es muſs ſeyn CH + KH : KH = 121 : 74; oder CH + KH — KH : KH = 121 — 74 : 74; das iſt, CH : KH = 47 : 74, und alſo $KH = CH \times \frac{74}{47}$. Bey meinem Perpendikel hat CH 70,3 Linien; ſo ſollte alſo KH 110,7 lang ſeyn. Es fehlt nur etwas weniges; denn es iſt KH = 109,5, vielleicht, weil ſich anfangs CH nicht ſo genau beſtimmen läſst, und ich es um etwas kleiner angenommen habe. Es iſt aber daran nichts gelegen: ja ich rathe KH eher länger machen zu laſſen; denn, wenn dieſes Rohr mehr korrigirt, als KC erfodert, hat die Hebelanrichtung weniger zu leiſten, und die Unterſätze A und B ſind weiter von C entfernet; da im Gegentheile ſie auch den Fehler heben muſs, den die zu kurze meſſingene Hülſe noch übrig läſst. Dieſe ſtehet bey mir unter der Linſe noch 68 Linien vor, und wenn es auch 72 bis 80 wären, würde dadurch der Perpendikel kein übles Anſehen bekommen.

17. Ein auf ſolche Art verfertigter, und nach allen Theilen fleiſig ausgearbeiteter Perpendikel, wird ohne Zweifel ganz richtig den vorhabenden Abſichten entſprechen, wenn nur die Unterſätze der meſſingenen Regel im gehörigen Orte ſtehen. Dieſer aber wird kaum anders, als durch Beobachtung korreſpondirender Höhen, oder einer guten Mittagslinie gefunden. Ich habe mich beyder Mittel bedient, und zu Anfang des Jahrs 1776, wo ich eben die von mir gezogene Mittagslinie prüfen wollte, die Unterſuchung ſo angeſtellet.

Vom 16. bis 19. Jänner, und auch vom 14. bis 25. Hornung war die Temperatur des Zimmers, in welchem die Uhr hanget, und auch die Mittagslinie,

tagslinie ſich befindet, ziemlich gleich, und ein gutes Thermometer mit Weingeiſt, von dem berühmten Mechanikus Brander in Augsburg *), zeigte beſtändig 5 bis 6 Grade unter temperirt an. Ich konnte auch dieſen Stand mit geringer Mühe, bey einer ziemlich gleichen und nicht zu kalten Witterung leicht erhalten, weil von meinem Wohnzimmer aus mir eine Thür den Zugang zur Uhr unmittelbar geſtattet. Es gieng dieſe täglich um 2″, 2 zu früh. Vom 20. Jänner bis 2. Hornung fiel die ſchon bekannte groſſe Kälte ein, der ich vielmals mit Oefnung der Fenſter den freyen Zugang geſtattete. Das Thermometer zeigte nunmehr im Mittel und faſt unverändert, 22 bis 23 Grade unter temperirt an, folglich um 17 mehr, als vorher. Aber dieſe 17 Grade reſpondiren nur gegen 15 auf dem Reaumuriſchen. Ich beobachtete, weil das Wetter ſehr heiter war, mit der Mittagslinie faſt täglich die correſpondirenden Höhen der Sonne. Mit einer ganz geringen Differenz accelerirte die Uhr im Mittel 5″, 7 des Tags, und alſo 3, 5 mehr, als vom 16. bis 19 Jänner, und auch nachmals vom 14. bis 25. Hornung. Dieſe 3″, 5 kommen von 15 Graden gröſerer Kälte her, welche (n. 11.) würde 10 hervorgebracht haben, wenn nicht der Perpendikel ſchon 6, 5 gehoben hätte.

Er wurde wirklich, ohne Abrechnung der Korrektion, um Cc = 0,102 Lin. verkürzet, und weil die Uhr noch einen Fehler von 3″, 5 anzeigte, war der Punkt F (Fig. 2.) noch um 0,036 Lin. zu wenig von der Hebelanrichtung herabgelaſſen weil A und B zu weit von C entfernt waren. Ich habe alſo nach einer Zeit, auf einem tauſendtheilichen Maasſtabe des Pariſer Schuhes CA und CD genau gemeſſen. Es hatte CD 102,2, und CA 91, 1 Theile. Dieſe Zahlen mit 0,144 multipliciret, geben in Linien CD = 14,7168 und CA = 13,1184. Wenn aber, wie es hier die Formel erfodert, CD = 1 wird

*) Es iſt dieſes von temperirt bis zum Punkte des ſiedenden Waſſers in 100 Grade getheilt; und der Gefrierungspunkt ſtehet 10,4 unter 0 oder temperirt.

wird, iſt $CA = \frac{131184}{147168} = \frac{911}{1022} = 0,891389$, $Cc = f = \frac{1020}{147168} = \frac{85}{12264} = 0,006930$8, und endlich $0,036 = Ff$, um welches F zu hoch ſtehet, $f = \frac{30}{147168} = \frac{5}{2044} = 0,0024462$. Daher konnte ich berechnen das wirkliche Verhältniſs von Cc zu Cm, und was nach dieſem CA zu CD für eines haben ſollte.

Es iſt $CF = \sqrt{2} = 1,41421$35, und $Cc = 0,0069308$. Die Summe davon iſt cF, wenn F wäre unverrückt geblieben: weil er aber um $fF = 0,0024462$ zu hoch ſtehet, darf nur $cf = 1,4186981$ angenommen werden, deſſen halber Theil $cg = 0,709349$. Dieſer iſt eben den Sinus des Winkels dcg, weil $cd = 1$. Man findet für ihn 45°, 10′ 55″, 1; und alſo iſt $gcd = 44°, 49′, 4″, 9 = \phi$, und $cyc = cam = 45° - \phi = 19′, 55″, 1$.

Aus dieſem Winkel ſammt $ma = CA = 0,891389$ kann $cm = ma \times \text{tang. cam}$ berechnet, und hernach $Cm = Cc + cm$ gefunden werden.

L. T. 10′, 55″, 1 = 7,5018849

$ma = \frac{911}{1022}$ = 9,9500675

7,4519524 = 0,00283 1082 = cm = a − f

0,0069308 54 = Cc = f

0,0097619 36 = Cm = a

Es iſt alſo bey dieſer Uhr das Verhältniſs $a : f = 9761936 : 6930854 = 104,22 : 74$, welches von 121 : 74 weit abgehet.

Wie ſich CA zu $CD = 1$ verhalten ſolle, beſtimmt die Formel $CA = \frac{a-f}{f} \times \sqrt{2} = \sqrt{\frac{a-f}{f}} \times \sqrt{2} \times \frac{12264}{85}$. Von $a - f$ iſt der Log. eben vorher gefunden worden.

$$\begin{aligned}
\text{Log. } a - f &= 7,4519524 \\
\sqrt{2} &= 0,1505150 \\
12264 &= 4\,0886321 \\
\frac{1}{85} &= 8,0705811 - 10. \\
\hline
& 9,7616806 = 0,57767 = CA:
\end{aligned}$$

Es soll also seyn CD : CA = 100000 : 57767; und weil CD = 14,7168, wird CA = 8,5015 Linien.

§. 8. Warum das Verhältniss von Cc zu Cm so sehr verschieden gegen 74 : 121 ausgefallen sey, ist die Ursache nicht diese, dass sich die messingene Regel nach Maas anderer zu wenig verlängere oder verkürze. Es muss die Hebelanrichtung auch die Veränderung der stählenen Schwungfeder L M. (Fig. 1.) sammt jenem Theile bey M korrigiren, wo die Stangen zusammengeschraubet sind. Die Summe davon macht über 2,5 Zolle aus. Vielleicht ist ihr auch noch etwas vom untern Theile CK überlassen, wenn die messingene Hilfe nicht alles leistet. Es kann auch seyn, dass der Künstler wider mein Einrathen und Verlangen die messingne Regel zu steif gearbeitet, und zu stark gehämmert habe, wodurch die Ausdehnungskraft vermindert wird. Nun alles dieses wird durch die Rechnung dem Verhältnisse Cc : Cm zugeschrieben, wenn gleich wirklich cm grösser ist, als man daher findet. Es liegt aber nichts an diesem. Wenn nur der Fehler gehoben wird, er möge aus was immer für einer Quelle entspringen.

Man muss auch aus gleichen Ursachen bey dem Harrisonischen Perpendikel die Länge der messingenen Stangen grösser machen, als das Verhältniss von 74 : 121 erfodert. Doch würde man dort gewiss einen Fehler von 3′,5 so leicht und geschwind nicht gehoben haben. Nachdem ich die Unterfätze

der

der meſſingenen Regel auf 8, 5 Lin. von C verſchoben hatte, fand ich bis daher auch in der gröſsten Kälte und Wärme keinen beträchtlichen Fehler mehr, den ich dem Perpendikel allein zugeben könnte. Es äuſserten ſich freylich hin und wieder Ungleichheiten in dem Gange der Uhr: aber da eben dieſe zwar gut, doch nicht auf das vollkommenſte ausgearbeitet iſt; da auch das Oehl ſtocket oder trocknet, und was andere dergleichen Mängel ſind, welche von der Reibung, von Zähnen und Trieben, und alſo von gehemmter Kraft des Gewichts entſtehen, durfte ich nicht alles dem Perpendikel auf die Rechnung ſchreiben. Es wäre mir aber ſehr erwünſchlich, wenn ein geſchickter Künſtler nach der neueſten Art, und mit jener ganz beſondern Vollkommenheit wie es in England geſchiehet, für einen erfahrnen Aſtronom ſo einen Perpendikel an die Uhr anbrächte, um zu ſehen, wie viel man ſich davon verſprechen könne.

Meinen eigenen Fehler will ich hier nicht verbergen, den ich einsmal vielleicht aus einem unrichtigen Verſtande der Sprache, begangen hatte. Ich lieſs ſtatt des Meſſings Kupfer nehmen, weil ich bey de la Lande, le Paute und auch in andern franzöſiſchen Büchern durchaus *Cuivre* fand. Ich entdeckte aber bald den Fehler, und wurde durch eigene Erfahrung, mit welchen jene von Muſſchenbroeck in der Hauptſache übereinſtimmen, richtig, überzeugt, daſs ſich Kupfer weit weniger als Meſſing ausdehne, und zu ſolchen Perpendikeln nicht wohl tauglich ſey, wo es am beſten iſt, wenn zwey ſolche Metalle genommen werden, die unter dem nämlichen Grade der Wärme in der Ausdehnungskraft am weiteſten ſich von einander entfernen. Solche ſind nur, ſo viel mir bekannt iſt, ein gutes, weiches, nicht ſtahlartiges wohl ausgearbeitetes Eiſen, und ein milder, nicht zu ſpröder oder zäher Meſſing, der ſich von ſeinem Urſtoffe dem Kupfer in der Farbe, und in der Bearbeitung mit der Feile oder dem Drehmeiſel am mehreſten unterſcheidet.

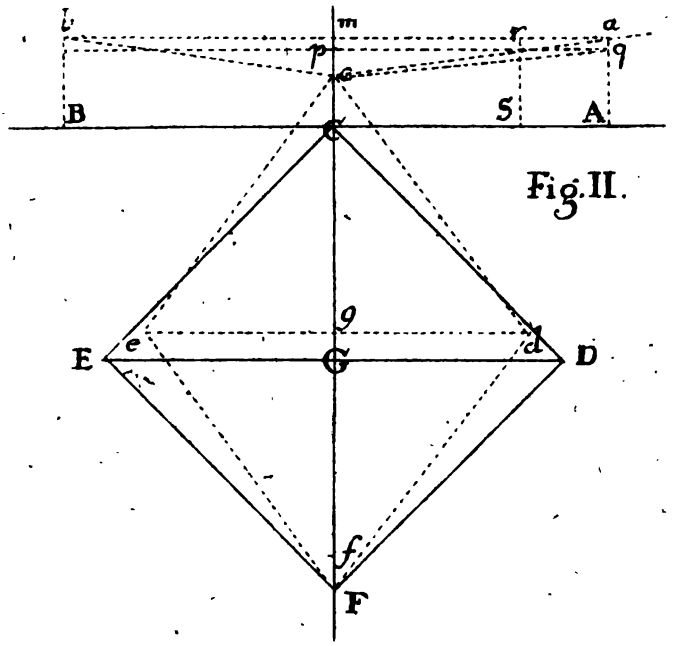
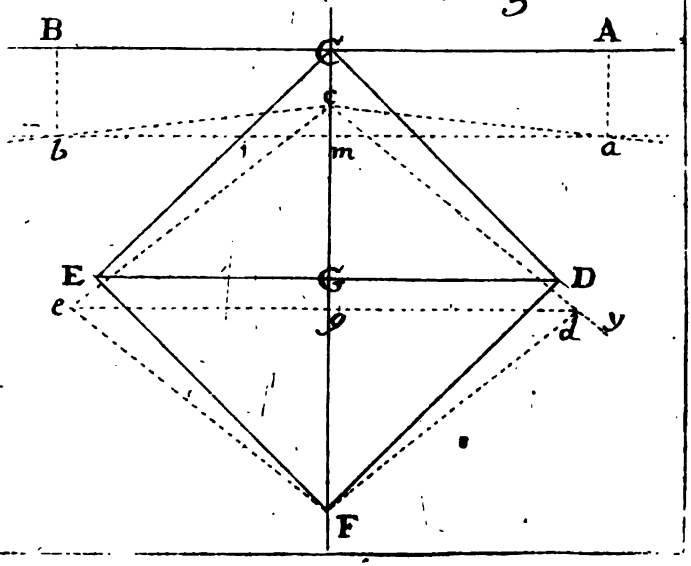


Fig. II.

Fig. III.



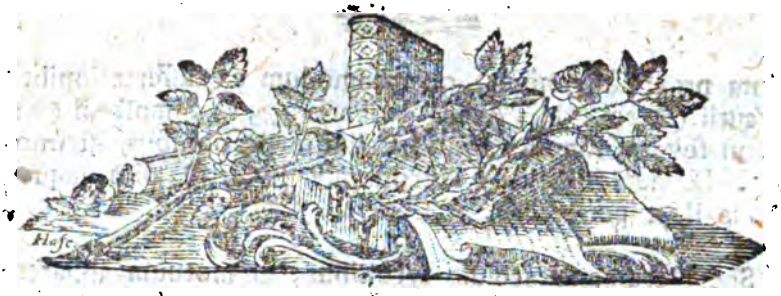
2667 Kyk

COMMENTATIO
DE
ABERRATIONIBVS STELLARVM FIXARVM
COMPVTANDIS

63838

QVA
AD AVDIENDAM
ORATIONEM
ADITIALEM MVNERIS
MATHESIN ET PHYSICAM
PVBLICE DOCENDI
DIE 12. APRILIS A. CIↃ IↃ CCLXXXVII.
HABENDAM
HVMANISSIME INVITAT
IOHANNES TOBIAS MAYER.

ERLANGAE
APVD IO. IAC. PALM. 1787.



§. 1.

Doctrinam de aberrationibus ſtellarum fixarum ad difficiliora aſtronomiae capita referri, et in inſtitutionibus huius ſcientiae paululum obſcure ſolere pertractari, nemo in hiſce rebus ſtudiorum ſuorum initii memor, eſt infitiaturus. Oſtendi nimirum ſolet, motum *apparentem* fixarum, a luminis propagatione ſucceſſiva, et motu telluris in orbita ſua, oriundum, conſiſtere in eo, ut ſtella quaevis intra anni ſpatium, parvam ellipſin in coelo videatur deſcribere, cuius axis major, in ſphaera coeleſti arcum conſtantem 40 minutorum ſecundorum, plano ecliptices ſemper parallelum metiatur, minor vero pro ratione ſinus latitudinis fixae varietur, et pro ſtella quidem in polo ecliptices poſita itidem arcum 40 ſec. ſubtendat, pro alia vero, in ipſo plano ecliptices conſtituta evaneſcat, ita ut ſtella, quae careat latitudine, in longitudinem duntaxat aberrare videatur, dum alia in polo ecliptices ſita, ellipſin hoc caſu in circulum diametri 40 ſecundorum abeuntem, deſcribere ſit intelligenda. Hae, ut ſolent vocari, ellipſes aberrationum, cum doctrina proiectionum cohaerent, ope vero earum, aſtronomi ſtellarum ſitus reſpectu aequatoris mutatos, h. e. aberrationes in declinationem et rectaſcenſionem earum ſolent computare, aliaque exinde deducere, quae in hoc negotio aſtrono-

morum praxi ſubveniunt, quemadmodum ex diſſertationibus Clairautii (Mem. de l'Acad. de Paris 1737) Simpſonii (Eſſays on ſeveral ſubiects 1740) Caillii in lectionibus aſtronomicis, D. de la Lande (Aſtronomie liv. 17) aliorumque, ulterius licet perſpicere.

Sed plerumque accidit tyronibus, ut motuum apparentium et proiectionum theoria optica, nondum ſatis verſati, non tantum in ellipſibus illis apparentibus, quovis caſu diſtincte ſibi repreſentandis, ſed potius adhuc in ipſis regulis, pro computu aberrationum exinde methodo graphica deducendis, et quocunque caſu ſine errandi periculo applicandis, aqua ipſis ſoleat haerere, nec diffiteor, me quoque, cum aſtronomiae ſtudium inchoarem, in hac aberrationum theoria maiorem ſimplicitatem deſideraſſe. Hinc, facturusne operae pretium ſim, ſi niſſis quidem ellipſibus illis, et prolixiori exinde nata figurarum ambage, hanc doctrinam analytice potius perſcripſerim, iudicio aliorum quidem relinquo; mihi vero ea, quae iam tradam, prae ceteris ſatisfecere. Forſan et aliis haud ingratum laborem ſuſcepiſſe videar.

§ 2.

1) Repreſentet igitur Circulus ϒ⊙V in ſphaera fixarum eclipticam, et in ejus plano, figura γOQTγ, orbitam telluris, in cuius loco T, tempore quocunque dato haereat tellus, in qua oculus ſit conſtitutus, qui obſervet Solem C iuxta rectam TC prolongatam in loco ⊙ Ecliptices, ita, ut poſito in ϒ initio arietis, ſit ϒ⊙ , vel quoque angulus γC⊙, longitudo Solis vera, conſueto more, ex ephemeridibus, pro tempore dato, excerpenda.

2) Ducatur jam a ſtella quadam fixa S, cuius latitudinem hic borealem aſſumo, linea quaedam recta ST ad oculum

lum ſpectatoris, eritque (demiſſa ex puncto quodam L, ipſius ST, perpendiculari LM, in planum eclipticae, iunctaque TM) angulus STM, latitudo ſtellae vera, angulus vero ⊙TM elongatio eiusdem a Sole, iuxta Eclipticam numerata, ubi ceterum ſtellam in figura propoſita, ita aſſumo, ut, ducta tangente, vel perpendiculari Tt in ⊙T, verſus eandem plagam, iuxta quam tellus T in directione Tr, in orbita ſua movetur, angulus MTr ſit acutus, vel ſaltem minor 90°.

3. His itaque poſitis, recta Tt, in directione tangentis Tr ſumta, exprimat celeritatem telluris in loco T orbitae ſuae, recta vero aT, in directione ST, luminis a fixa quadam ſtella venientis velocitatem, facileque poteſt demonſtrari, oculum in T conſtitutum, celeritate quidem Tt motum, a lumine vero iuxta directionem aT perculſum, ſtellam haud in loco ſuo vero S, fore percepturum, ſed eandem in plano anguli STr iuxta aliam directionem Ts, a recta TS exiguo angulo STs, a ratione celeritatum telluris in orbita, et luminis, pendente, aberrantem, eſſe conſpicaturum. Ponatur ſcilicet in Fig. 2, rectas Tt, TS, eandem habere ſignificationem, quam illis dedimus in figura 1, ſumtasque eſſe Tt, Ta, in ratione velocitatum telluris in orbita ſua, et luminis, conſtructo parallelogrammo atαt, facile erit demonſtrare, diagonalem Tα, expreſſuram eſſe directionem, iuxta quam ſtella, oculo in T conſtituto, a vero ſuo loco S, angulo STα aberrans, ſit comparitura h. e. in directione TS *verum* ſideris, in diagonali vero Tα, utcunque prolongata, *viſum* ſive *apparentem* eius *locum* s, iri repertum.

4. Hunc angulum deviationis STα, *aberrationem*, planum vero STt (Fig. 2) ſive STr (Fig. 1), *planum aberrationis* ſolent vocare aſtronomi.

5. Ope eclipſium ſatellitum Iovis cognoverunt aſtronomi, celeritatem mediam telluris in orbita ſua ad eam luminis, eſſe in ratione 1 : 10313.

Sumtis igitur Fig. 2 rectis, $Tt = 1$; $Ta = 10313$, poſitoque angulo STt, quem conſtituit recta ad locum verum ſtellae S, cum directione Tt telluris in orbita ſua, $= \Psi$, fiet angulus $\alpha aT = 180^\circ - \Psi$ et in triangulo αaT, cognitis $a\alpha = 1$; $aT = 10313$, poſito ſinu toto $= 1$, erit

$$\text{tang } \alpha Ta = \frac{a\alpha \sin \alpha aT}{aT - a\alpha \cos \alpha aT} = \frac{\sin \Psi}{10313 + \cos \Psi}$$

6. Cum vero angulus αTa ſemper ſit admodum exiguus, poteſt poni $\text{tang } \alpha Ta = \alpha Ta$ in partibus ſinus totius. Porro erit quoque ſemper ſine errore ſenſibili $10313 + \cos \Psi = 10313$. Hinc proxime

$$\alpha Ta = \frac{\sin \Psi}{10313},$$

vel in minutis ſecundis

$$\alpha Ta = \frac{\sin \Psi \cdot 206264'' = 20'' \sin \Psi}{10313}$$

quae igitur quantitas, aberrationem fixae, in plano STr exprimet; hoc vero angulo STs (Fig. 1) $= 20'' \sin \Psi$, raro aſtronomi utuntur, ſed potius ſolent computare, quae exinde conſequatur aberratio, tam in longitudinem, quam in latitudinem fixae.

7. Cum ſcilicet obſervator T, ſtellam S non in loco ſuo vero S, ſed eandem in plano aberrationis STr, iuxta directionem Ts, a vera TS angulo $20'' \sin \Psi$ aberrantem conſpiciat, facile patebit, hac aberratione, non modo elongationem veram ſtellae a Sole, hinc quoque eius longitudinem, ſed etiam latitudinem eius veram paululum mutari. Sit I punctum quoddam in directione apparenti Ts pro lubitu aſſumtum, ab eoque perpendiculum Im, in planum eclipticae demiſſum, erit angulus ITm *latitudo ſtellae apparens*, angulus vero

vero mT☉ *elongatio eius a Sole apparens*, quae igitur quantitates omnino, a veris LTM, MT☉ (2) differre cenſentur. Erit ſcilicet angulus exiguus mTM mutatio elongationis ſtellae a ſole, ab aberratione luminis oriunda, differentia autem angulorum LTM — lTm, exinde conſecuta latitudinis variatio, quas igitur quantitates ſequenti problemate invenire docebimus.

§. 3.

Problema.

Reperire aberrationes tam latitudinis fixae, quam elongationis eiusdem a ſole

Sol. Voceptur latitudo vera LTM = β, elongatio vera MT☉ = ε.

8. Latitudinem hinc ſumo borealem, elongationem vero minorem 180°, ita ut angulus rTM (2) = ε — 90°, acutus ſit, verſus eandem plagam, iuxta quam excurrit directio prolongata Tt.

9. Iam ex puncto quodam L rectae TS (2) in tangentem Tπ perpendicularis Lp demittatur, iunctaque pM, erit angulus LpM inclinatio plani aberrationis (4) ad ecliptican, quae vocetur LpM = B.

Si igitur linearum in Fig. 3 conſtructarum ſignificatio eadem ſit, quae Fig. 1, circa punctum T nanciſcimur angulum ſolidum, ternis angulis planis LTM = β, pTM = ε — 90°, pTL = Ψ comprehenſum, quorum inclinatio ad ſe invicem ita ſe habet, ut ſit angulus inclinationis planorum LpM, et pTM rectus, bina vero plana TpL, pTM ſub angulo LpM = B (9) ad ſe invicem inclinentur. Quare ex regulis Trigonometriae ſphaericae, hae binae aequationes haud difficulter reperientur

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } \beta}{\text{ſin } (\varepsilon - 90^\circ)}$$

$$\text{coſ } \Psi = \text{coſ } \beta \text{ coſ } (\varepsilon - 90^\circ)$$

10. Quia

10. Quia vero aberrationes, sive angulos exiguos STs, MTm (Fig. 1) ut et differentias latitudinum, verae LTM et visae lTm, tanquam differentialia quantitatum Ψ, ε et β licet considerare, simulque harum quantitatum Ψ, ε, β relationes aequationibus inventis (9) contineantur, in quibus angulum B pro eo momento, quo tellus in loco T orbitae suae haeret, tanquam constantem possumus tractare, ponendo $\operatorname{tang} B = 0$, differentiandoque, has binas sequentes aequationes differentiales, pro relatione aberrationum $d\Psi$, $d\varepsilon$, $d\beta$ porro nanscisemur.

I. $\sin(\varepsilon - 90^\circ)\, d\beta - \sin\beta\cos\beta\cos(\varepsilon - 90^\circ)\, d\varepsilon = 0$

II. $d\Psi \sin\Psi = \cos(\varepsilon - 90^\circ) \sin\beta d\beta + \cos\beta \sin(\varepsilon - 90^\circ)\, d\varepsilon.$

Quae posterior ob $d\Psi = 20'' \sin\Psi$ (6) abit in

III. $20'' \sin\Psi^2 = \cos(\varepsilon - 90^\circ) \sin\beta d\beta + \cos\beta \sin(\varepsilon - 90^\circ) d\varepsilon.$

11. Ex priori (I) fit

$$d\beta = \frac{\sin\beta\cos\beta\cos(\varepsilon - 90^\circ)}{\sin(\varepsilon - 90^\circ)}\, d\varepsilon$$

qui valor in posteriorem III substitutus praebet.

12. $$d\varepsilon = 20''. \frac{\sin(\varepsilon - 90^\circ) \cdot \sin\Psi^2}{\cos\beta\,(\sin\beta^2 \cdot \cos(\varepsilon - 90^\circ)^2 + \sin(\varepsilon - 90^\circ)^2)}$$

13. Facile autem deducitur ex (9), fore

$$\sin\Psi^2 = \sin(\varepsilon - 90^\circ)^2 + \sin\beta^2 \cos(\varepsilon - 90^\circ)^2$$

14. Quocirca fiet (12) multo simplicius

$$d\varepsilon = 20'' \frac{\sin(\varepsilon - 90^\circ)}{\cos\beta}$$

et hinc (11)

$$d\beta = 20'' \sin\beta \cos(\varepsilon - 90^\circ)$$

quae igitur formulae exprimunt aberrationes fixae respectu eius elongationis a sole, eiusdemque latitudinis, ita, ut positis

elongatione vera fixae a sole $= \varepsilon$
latitudine eiusdem vera $= \beta$
elongatione apparenti $= E$
latitudine apparenti $= b$

esse

esse debeat $E = \varepsilon - 20'' \frac{\sin(\varepsilon - 90°)}{\cos\beta}$

$$b = \beta - 20'' \sin\beta \cos(\varepsilon - 90°)$$

quoniam scilicet sub conditionibus in (2) assumtis h. e. ponendo latitudinem stellae borealem, et angulum $\varepsilon - 90°$ recto minorem, non modo angulus $pTS = \Psi$, quantitate $d\Psi = 20'' \sin\Psi$ decrescat, sed quoque elongatio apparens et latitudo stellae visa, minores esse debeant veris, adeoque differentialia $d\Psi$; $d\varepsilon$, et $d\beta$ ut negativa spectentur.

15. Per centrum solis C (Fig. 1) agantur iam rectis TM, et Tm parallelae Cw, et Cx, eritque, si Tm eclipticam in puncto m secare intelligatur, punctis w et x itidem in ecliptica assumtis, arcus ϒ☉PVw, longitudo vera stellae S, arcus vero ϒ☉PVx longitudo eiusdem apparens, quoniam scilicet ob infinitas fere stellarum, punctorumque m, w, x, a sole C, distantias, semidiameter CT orbitae terrestris instar puncti est habenda, adeoque rectae Tm, et Cx coincidere sunt intelligendae, ita ut punctum m in ecliptica, cui respondet longitudo ϒ☉PVm stellae, cum illo x prorsus congruere sit statuendum.

16. Si iam ponamus longitudinem stellae veram = L
apparentem = ℓ
longitudinem solis sive arc. ϒ☉ = λ
arcus w☉ erit mensura anguli wC☉ = MTC = ε
arcus vero x☉ mensura anguli mTC = xC☉ = E.
habebimusque simul in figura proposita

$$E = 360° - \ell + \lambda$$
$$\varepsilon = 360° - L + \lambda$$

Consequenter (14)

$$360° - \ell + \lambda = 360° - L + \lambda - 20'' \frac{\sin(270° - L + \lambda)}{\cos\beta}$$

seu

seu

$$\lambda = L + 20'' \frac{\sin (270° - L + \lambda)}{\cos \beta}$$

vel quoque

17. $$\lambda = L - 20'' \frac{\cos (\lambda - L)}{\cos \beta}$$

$$= L - 20'' \frac{\cos (L - \lambda)}{\cos \beta}$$

Quae igitur formula ex vera longitudine ſtellae = L, docet reperire apparentem = λ, et valor $20'' \frac{\cos (L - \lambda)}{\cos \beta} = x$, qui ad veram longitudinem L debet accedere, ut reperiatur apparens, vocari ſolet aberratio ſtellae iuxta longitudinem, ſive ſimpliciter aberratio longitudinis.

18 Ex (14) fit porro latitudo apparens

$$b = \beta - 20'' \sin \beta \cos (270° - L + \lambda)$$

vel

$$b = \beta + 20'' \sin \beta \sin (L - \lambda)$$

ubi quantitas $20'' \sin \beta \sin (L - \lambda) = y$ appellatur aberratio latitudinis.

19. Ex cognitis regulis trigonometriae iam pro qualibet alia conditione reſpectu ſitus ſtellae verſus ecliptican diiudicari poterit, num aberrationes inventae, debeant addi ad longitudinem veram, latitudinemque, ſive vero ab illis ſubtrahi, ut reperiantur apparentes; hoc ſcilicet pendebit ab eo, an caſu quodam dato, ſinus vel coſinus, formulas (17. 18) ingredientes, valores recipiant poſitivos, vel negativos, quod vero haud aegre, caſu quocumque oblato, regulae docent in elementis Trigonometriae ubivis obviae.

Sic e. gr. formulae (17. 18) latitudinem ſtellae borealem ſupponebant (2). Pro auſtrali, fit β quantitas negativa, et hinc $\sin -\beta = -\sin \beta$; $\cos -\beta$ ob coſinus angulorum negativorum poſitivos, $= +\cos \beta$. Quapropter hoc caſu habebimus.

λ =

$$l = L - 20'' \frac{\cos (L - \lambda)}{\cos \beta}$$

$$b = \beta - 20'' \sin \beta \sin (L - \lambda).$$

et sic in aliis casibus.

20. *Exemplum.* Quaerantur aberrationes longitudinis, et latitudinis Sirii, die 1 Maji 1777, tempore meridiei.

Ex Ephemeridibus Berol. ad annum propositum hoc tempore est longitudo Solis

$$\lambda = 41°.\ 20'.\ 8''$$

longitudo Sirii

$$L = 101°.\ 0'.\ 56''$$ et eius

latitudo australis

$$\beta = -\ 39°.\ 32'.\ 55''$$

Hinc prodit, neglectis, quod semper sine errore sensibili fieri potest, minutis secundis

$$L - \lambda = 59°.\ 48'$$
$$\sin \beta = -\sin 39°.\ 33'$$
$$\cos \beta = +\cos 39°.\ 33'$$

adeoque

log	$20'' = 1{,}30103$	log	$20 = 1{,}30103$
l.	$\sin \beta = 9{,}80396$	l.	$\cos (L - \lambda) = 9{,}70331$
l.	$\sin (L - \lambda) = 9{,}93606$		$11{,}00434$
	$\log y = 1{,}04105$	l.	$\cos \beta = 9{,}88709$
		log	$x = 1{,}11725$

hinc in (17. 18) aberratio longitudinis $x = 13'', 1$

latitudinis $y = 11'', 0$

quae vero binae hoc casu debent esse subtractivae ut adeo sit

Sirii longitudo apparens $= 101°.\ 0'.\ 56'' - 13'', 1$
$= 101\ \ 0.\ 42,\ 9$

latitudo apparens $= -\ 39°.\ 32'.\ 55'' - 11, 0$
$= -\ 39.\ 33.\ 6$

(*Corollaria.*)

21. Si fit $L = \lambda$, sive longitudo solis = longitudini stellae, fit

$$\ell = L - \frac{20''}{\cos \beta}$$
$$b = \beta$$

hoc casu igitur latitudo apparens aequatur verae, quod contingit ergo, si stella et sol versentur in coniunctione.

22. Casu quo sit $L - \lambda = 180°$, vel sole cum stella in oppositione versante, habebimus

$$\ell = L + \frac{20''}{\cos \beta}$$
$$b = \beta$$

ergo iterum latitudinem apparentem verae aequalem.

23. Binis casibus (21 - 22) sol et stella versari dicuntur in *syzigiis*; in quibus ergo nulla habetur aberratio in latitudinem. Ponendo igitur hoc casu aberrationem longitudinis, sive valorem $\frac{20''}{\cos \beta} = \varphi''$, (quae quantitas pro qualibet stella seorsim potest computari, et pro ea constantem quasi exhibet coefficientem) pro quolibet alio casu erit

$$\ell = L - \varphi'' \cos (L - \lambda)$$

24. Posito $L - \lambda = 90°$, vel $L = 90° + \lambda$, fit

$$\ell = L$$
$$b = \beta + 20'' \sin \beta$$

25. Pro $L - \lambda = 270°$ itidem fit

$$\ell = L$$

sed $$b = \beta - 20'' \sin \beta$$

26. His binis casibus sol cum stella in *quadraturis* esse dicitur, in quibus igitur, longitudo apparens verae aequatur, nullaque datur aberratio in longitudinem. Ponendo vero

vero hoc casu aberrationem in latitudinem sive valorem $20'' \sin\beta$, pro qualibet stella seorsim computandum $= \omega''$, generaliter erit aberratio in latitudinem $= \omega''. \sin(L - \lambda)$ vel

$$b = \beta + \omega'' \sin(L - \lambda).$$

27. Hi valores φ'' et ω'', ut facile patet, erunt aberrationes *maximae*, stellae, cuius latitudo est $= \beta$, solentque astronomi has aberrationes maximas φ'' et ω'', pro qualibet stella seorsim computatas, plerumque catalogis fixarum inserere, ita ut deinceps, ope formularum

$$\lambda = L - \varphi'' \cos(L - \lambda)$$
$$b = \beta + \omega'' \sin(L - \lambda)$$

aberrationes fixarum pro qualibet longitudine solis admodum facile possint determinari, quo negotio arcus $L - \lambda$ *argumenta aberrationum* vocare mos est.

§. 4.

Problema.

Reperire aberrationes fixarum iuxta rectascensiones et declinationes earundem

28. *Solutio.* Cum rectascensio et declinatio sideris, pendeant ab eiusdem longitudine, latitudine, obliquitateque eclipticae, haud difficulter perspicitur, mutato, ob luminis propagationem successivam, stellae situ versus ecliptican, et eius positionem respectu aequatoris exinde aliquam passuram esse mutationem. Quapropter eum saepe his stellarum aberrationibus in rectascensionem et declinationem egeat praxis astronomica, in hac vero investigatione plerumque laborent astronomiae tyrones, iam peculiari methodo, facili, ut opinor, et explicata, hanc doctrinam pertractabo.

29. Sit igitur ascensio recta stellae $= \alpha$
declinatio eiusdem $= \delta$
longitudo vera $= L$

latitudo $= \beta$
obliquitas eclipticae $= \vartheta$
angulus positionis stellae $= p$
longitudo solis $= \lambda$

et in libris astronomicis sequentes reperiuntur formulae

I. $\sin \delta = \sin L \sin \vartheta \cos \beta + \cos \vartheta \sin \beta$

II. $\operatorname{tang} \alpha = \cos \vartheta \operatorname{tang} L - \dfrac{\sin \vartheta \operatorname{tang} \beta}{\cos L}$

III. $\cos \alpha = \dfrac{\cos \beta \sin p}{\sin \vartheta}$
IV. $\cos \delta = \dfrac{\cos L \sin \vartheta}{\sin p}$ } unde $\dfrac{\cos \beta \cos L}{\cos \delta} = \cos \alpha$

V. $\operatorname{tang} p = \dfrac{\sin \vartheta \cos L}{\cos \beta \cos \vartheta - \sin \beta \sin L \sin \vartheta}$

quae ob $\operatorname{tang} p = \dfrac{\sin p}{\cos p}$ etiam abit in

VI. $\cos \beta \cos \vartheta - \sin \beta \sin L \sin \vartheta = \dfrac{\sin \vartheta \cos p \cos L}{\sin p}$

VII. $\cos p \sin L - \sin p \sin \beta \cos L = \sin \alpha$
et ex (V)

VIII. $\operatorname{tang} \vartheta = \dfrac{\cos \beta \sin p}{\sin \beta \sin L \sin p + \cos L \cos p} = \dfrac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$

vel $\sin \beta \sin L \sin p + \cos L \cos p = \dfrac{\cos \beta \sin p}{\sin \vartheta} \cos \vartheta$
$= \cos \alpha \cos \vartheta$ (III)

IX. $\cot \delta = \dfrac{\cos \delta}{\sin \delta} = \dfrac{\cos \beta \cos L}{\sin \beta \cos p \cos L + \sin p \sin L}$

vel $\sin \beta \cos p \cos L + \sin p \sin L = \dfrac{\cos \beta \cos L}{\cos \delta} \cdot \sin \delta$
$= \cos \alpha \cdot \sin \delta$ (III. IV)

X. sin

X. $\sin\beta = \cos\vartheta \sin\delta - \sin\alpha \sin\vartheta \cos\delta$

XI. Ex (VII) fit porro multiplicando utrinque per $\sin\beta$ ponendoque deinceps $1 - \cos\beta^2$ loco $\sin\beta^2$,

$\sin p \cos L - \sin L \sin\beta \cos p$
$= \cos\beta^2 \sin p \cos L - \sin\alpha \sin\beta$
$= \cos\alpha^2 \sin\vartheta \cos\delta - \sin\alpha \sin\beta$ (III. IV)
$= \cos\alpha^2 \sin\vartheta \cos\delta - \sin\alpha(\cos\vartheta \sin\delta - \sin\alpha \sin\vartheta \cos\delta)$. (X)
$= \sin\vartheta \cos\delta - \sin\delta \cos\vartheta \sin\alpha$

30. Haec lemmata non modo varias relationes inter quantitates α, δ, L, β, ϑ, p (29) in praxi ſoepius obvias, oſtendunt, ſed quoque iam in theoria calculi aberrationum ulterius exponenda inſignem praeſtant uſum. Demonſtrationibus vero earum hic ſupersedeo, cum partim in illuſtris KAESTNERI *Aſtronomiſchen Abhandlungen Erſte Samml. III. Kap. 1ſte u. 2te Aufgabe*, (correctis ibidem erratis typographicis in expreſſione tang λ, ubi in numeratore loco ſigni $-$ ponendum eſt $+$) et ibidem articulo 468, ubi agitur de angulo poſitionis, reperiantur, partim ex propria inſpectione, et comparatione laterum et angulorum trianguli ſphaerici, quod comprehenditur inter ſtellam datam, binosque polos eclipticae et aequatoris, ope trigonometriae ſphaericae eruantur. Quapropter iam ad ipſam aberrationum inveſtigationem accedo.

31. Hunc in finem aberrationes rectaſcenſionis et declinationis, ob parvitatem earum, tanquam differentialia conſideraſſe iuvabit, quae ex aberrationibus longitudinis et latitudinis ſupra inventis ſequenti modo facillime determinabuntur.

Differentietur aequatio (29. II) ita, ut quantitates α, β et L, ob mutationem earum propter aberrationes, ſpectentur variabiles, obliquitas vero eclipticae ϑ, cum aberratione haud afficiatur, ut conſtans tractetur, eritque

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha^2} = \frac{(\cos\beta\cos\vartheta - \sin\vartheta\sin\beta\sin L)\cos\beta}{\cos\beta^2\cos L^2} dL - \frac{\cos L \sin\vartheta}{\cos\beta^2\cos L^2} d\beta$$

Cum vero ſit ex (29. VI)

$$\cos\beta\cos\vartheta - \sin\vartheta\sin\beta\sin L = \frac{\sin^2\vartheta\cos p\cos L}{\sin p}$$

hoc valore ſubſtituto fiet.

$$\frac{d\alpha}{\cos\alpha^2} = \frac{\cos\beta\cos p\,.\,dL - \sin p\,.\,d\beta}{\cos\beta^2\cos L\sin p}\,.\,\sin\vartheta$$

ſed exiſtente ex (29. III) $\cos\alpha^2 = \frac{\cos\beta^2\sin p^2}{\sin\vartheta^2}$, habebimus per-

ro $d\alpha = (\cos\beta\cos p\,.\,dL - \sin p\,.\,d\beta)\frac{\sin p}{\sin\vartheta\cos L}$

vel ex 29. IV.

$$d\alpha = \frac{\cos\beta\cos p\,.\,dL - \sin p\,.\,d\beta}{\cos\delta}$$

32. Haec igitur formula oſtendit, quantum mutetur aſcenſio ſtellae recta, ſi longitudo eius L in $L+dL$, latitudo vero, eiusdem β abeat in $\beta+d\beta$.

Hinc ſubſtituendo loco dL, $d\beta$ aberrationes longitudinis et latitudinis, nimirum

$$dL = -\frac{20''\cos(L-\lambda)}{\cos\beta} \qquad (17)$$

$$d\beta = +20''\sin\beta\sin(L-\lambda) \qquad (18)$$

nanciſcimur *aberrationem in aſcenſionem rectam ſtellae*

$$d\alpha = -20''\frac{\cos p\cos(L-\lambda) + \sin p\sin\beta\sin(L-\lambda)}{\cos\delta}$$

ita ut poſita aſcenſione recta vera $= \alpha$, viſa $= A$ habeatur

$$A = \alpha + d\alpha$$

33. *Pro aberratione in declinationem*, ſumo aequationem (29. I) differentiandoque nanciſcor

$$d\delta\cos\delta = (\cos\vartheta\cos\beta - \sin L\sin\vartheta\sin\beta)\,d\beta + \cos\beta\cos L\sin\vartheta\,.\,dL$$

vel

vel ex (29. VI)

$$d\delta \cos\delta = \frac{\sin\vartheta \cos L}{\sin p}\,(\cos p\, d\beta + \cos\beta \sin p.\, dL)$$

sive (29. IV)

$$d\delta = \cos p.\, d\beta + \cos\beta \sin p.\, dL$$

unde substituendo valores ipsarum dL, $d\beta$, obtinebimus:

34. $d\delta = -20''\,(\sin p.\cos.(L-\lambda) - \cos p \sin\beta \sin(L-\lambda))$

ita ut posita declinatione stellae vera $= \delta$, apparente $= D$; habeatur

$$D = \delta + d\delta.$$

35. I. Ante vero quam has (32 et 34) inventas formulas ulterius evolvam, magisque ad praxin accommodem, quaedam adhuc respectu aberrationis in ascensionem rectam admonuisse iuvabit. Invenimus scilicet formulam (32) differentiando illam (29 II), h. e. tractando quantitates $d\alpha$, $d\beta$, etc. tanquam admodum parvas, ita ut pro differentialibus sine errore sensibili haberi possint; iam vero considerando formulam pro valore ipsius $d\alpha$ inventam (32), ipsi divisorem $\cos\delta$ inesse deprehendimus, qui ponendo declinationem stellae fere quadranti aequalem, in fractionem admodum parvam abit, valoremque aberrationis $d\alpha$ hoc casu valde magnum efficit, ita ut adeo infinitus fieret, pro stella quae in ipso aequatoris polo esset sita. Quod cum sit absurdum, patet hoc casu formulam (32) haud posse locum habere, principiisque differentiationis, unde deducebatur, ea ratione adversari, quod casu, ubi declinatio stellae proxime ad quadrantem accedat, minime liceat, quantitatem $d\alpha$ ut admodum parvam considerasse. Quapropter aliam iam formulam pro aberratione in ascensionem rectam investigabo naevis istis carentem, et ad quamcumque stellae declinationem accommodatam.

II. Sit igitur (Fig. 4) AR ecliptica, eiusque polus in E; AQ Aequator, eiusque polus in P; S locus stellae verus,

s eiusdem locus apparens, ita ut planum aberrationis (4) sphaeram coelestem iuxta arcum Ss secare intelligatur. Porro repreſentent Pl et Ei, circulos declinationis, et latitudinis, ut et si,sl arcus circulorum maximorum ipſis arcubus Ei, Pl normales.

III. His poſitis, cum locus verus S, apparenti s ſemper ſit admodum propinquus, exiſtente ſcilicet $Ss = d\Psi = 20'' \sin \Psi$ (6), triangula Ssi, et Ssl tanquam rectilinea ſpectare licebit, in quibus ſit Si aberratio ſtellae iuxta latitudinem $= d\beta$, Sl vero aberratio iuxta declinationem, lSl angulus poſitionis $= p$. Angulus vero Pl in triangulo ſphaerico sPl exprimet aberrationem ſtellae in aſcenſionem rectam, quam igitur ſequenti modo perveſtigo.

IV. In triangulo rectilineo Sis, eſt

$$\cos sSi = \frac{d\beta}{d\Psi}, \text{ et hinc}$$

$$\sin sSi = \frac{\sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2}}{d\Psi}$$

V. Porro $\sin sSl = \sin (sSi - lSi) = \sin (sSi - p)$ vel

$$\sin sSl = \sin sSi \cos p - \sin p \cos sSi$$

$$= \frac{\sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2)} \cos p - \sin p\, d\beta}{d\Psi}$$

Hinc $sl = Ss \cdot \sin sSl = d\Psi \sin sSl$ vel

$$sl = \sqrt{(d\Psi^2 - d\beta^2)} \cos p - \sin p\, d\beta$$

VI. Sed $d\Psi = 20'' \sin \Psi$ (6); $d\beta = -20'' \sin \beta \cos (\varepsilon - 90°)$ (14)

$$= +20 \sin \beta \sin (L - \lambda) \text{ (18)}$$

Hinc $d\Psi^2 - d\beta^2 = 20^2 (\sin \Psi^2 - \sin \beta^2 \cos (\varepsilon - 90)^2)$

$$= 20^2 . \sin (\varepsilon - 90°)^2 \text{ (13)}$$

et $\sqrt{(d\Psi^2 - d\beta)} = 20'' \sin (\varepsilon - 90°) = -20'' \cos (L - \lambda)$, ſcilicet ob $\varepsilon - 90° = 270° - (L - \lambda)$; (16)

VIII.

VIII. Fit igitur arculus

$$ls = -20'' (\cos p \cos(L-\lambda) + \sin\beta \sin p \sin(L-\lambda))$$

quem vocabo = a.

IX. Hoc invento fit in triangulo sPl ad l rectangulo

$$\text{tang } sPl = \frac{\text{tang } ls}{\sin Pl} = \frac{\text{tang } a}{\cos\delta}$$

quia scilicet hic sine errore sensibili arcus Pl ipsi PS sive complemento declinationis δ potest surrogari.

X. Sic igitur pro aberratione stellae in ascensionem rectam nacti sumus formulam

$$\text{tang aberrat.} = \frac{\text{tang } a}{\cos\delta}$$

ex qua licet perspicere, casu, quo stella versetur in ipso aequatoris polo, tangentem aberrationis fieri infinitam, ipsamque consequenter aberrationem quadranti esse aequalem, neque adeo adipisci valorem infinitum, uti evenire si formulam supra inventam (32) eo usque velimus extendere, ut adeo pro stellis polo admodum vicinis, eam adhuc iustam esse nobis persuadeamus.

XI. Interim tamen haec formula (32) adhuc satis late patebit, cum facile ostendatur, pro casu, quo stellam polo tam vicinam sumamus, ut vel uno alterove gradu duntaxat, ab illo distet, attamen aberrationem eius iuxta veram formulam (x) computatam, tam parvam adhuc fore, ut tuto liceat, tangentes in illam ingredientes, arcubus ipsis aequales ponere, ideoque simpliciter statuere

$$\text{aberrat.} = \frac{a}{\cos\delta}$$

$$= -20'' \frac{(\cos p \cos(L-\lambda) + \sin\beta \sin p \sin(L-\lambda))}{\cos\delta}$$

h. e. computari posse iuxta eam duntaxat formulam quam supra (32) ex principio differentiationis elicuimus. Cum enim *maximus* valor ipsius a sive arcus ls = d Ψ sin sSl = 20″ sin Ψ sin sSl casu quo ipsos angulos Ψ et sSl rectis aequales statuamus, duntaxat ad 20″ ascendat, tangens quoque aberrationis maximae pro stella, quam binis duntaxat gradibus a polo distantem sumamus, pro qua igitur e. gr. sit $\delta = 88°$, iuxta formul. tang aberr. $= \frac{\text{tang } 20''}{\text{cos } 88°} = 0{,}0027\ldots$ tam parva adhuc esse deprehenditur, ut aberratione ipsa hoc casu vix ad 10 minuta prima assurgente, summo iure liceat eandem ex hac modo formula

$$\text{aberrat.} = \frac{20''}{\text{cos } 88°} = 20'' \text{ sec } 88°$$

computare.

Quapropter nihil impedit, quo minus formulam supra (32) inveniam, omnibus omnino stellis, polo, vel uno alterove gradu haud vicinioribus, adhuc convenire statuamus, in cuius igtur ulteriori explanatione jam pergere lubet.

35. Cum igitur sit

$$\text{cos } (L - \lambda) = \text{cos } L \text{ cos } \lambda + \text{sin } L \text{ sin } \lambda$$
$$\text{sin } (L - \lambda) = \text{sin } L \text{ cos } \lambda - \text{sin } \lambda \text{ cos } L$$

his valoribus substitutis, pro aberrationibus in ascensionem rectam et declinationem (32. 33) has nanciscimur expressiones

I. $d\alpha \text{ cos } \delta = -20'' (\text{cos } p \text{ cos } L + \text{sin } p \text{ sin } \beta \text{ sin } L) \text{ cos } \lambda$
$\quad - 20'' (\text{cos } p \text{ sin } L - \text{sin } p \text{ sin } \beta \text{ cos } L) \text{ sin } \lambda$

II. $d\delta = -20'' (\text{sin } p \text{ cos } L - \text{cos } p \text{ sin } \beta \text{ sin } L) \text{ cos } \lambda$
$\quad - 20'' (\text{sin } p \text{ sin } L + \text{cos } p \text{ sin } \beta \text{ cos } L) \text{ sin } \lambda$

36. Quodsi vero expressiones in (29. VII. VIII. IX. XI) inventas hic substituamus, formulae (35) abeunt in

I. $d\alpha \text{ cos } \delta = -20'' \text{ cos } \alpha \text{ cos } \vartheta \text{ cos } \lambda$
$\quad - 20'' \text{ sin } \alpha \text{ sin } \lambda$

II. $d\delta$

II. $d\delta = -20'' (\sin \vartheta \cos \delta - \sin \delta \cos \vartheta \sin \alpha) \cdot \cos \lambda$
$- 20'' \cos \alpha \sin \delta \cdot \sin \lambda$

in quas igitur nullae ingrediuntur quantitates, praeterquam obliquitas eclipticae $= \vartheta$, ascensio recta stellae $= \alpha$, et eiusdem declinatio $= \delta$, cum solis longitudine $= \lambda$, pro tempore dato, ex ephemeridibus excerpenda; cum contra, formulis (34) praeter has dictas quantitates insint quoque latitudo, et angulus positionis stellae, quae antea ex eiusdem ascensione recta et declinatione debent computari, nisi forte in catalogis fixarum iam reperiantur. Hoc respectu formulae (36) omnino simpliciores sunt censendae, quia ascensiones rectae et declinationes stellarum, ex earumdem culminationibus observatis immediate habentur. Sed iam operam dabo, ut formulas inventas (I. et II) cum nimis adhuc sint complexae, ad praxin magis accommodem, easque ad constructionem tabularum pro inveniendis aberrationibus, reddam concinniores.

37. Hunc in finem quaeratur primum angulus cuius tangens sit $= -\cos \vartheta \cot \alpha$, Ponaturque angulus iste $= C$.

38. Cum igitur sit $\tang C = -\cos \vartheta \cot \alpha$ erit quoque

$$-\frac{\sin \alpha \sin C}{\cos C} = \cos \vartheta \cos \alpha$$

quo valore in formulam (36. I) introducto, prodibit

$$d\alpha \cos \delta = -20'' \frac{(\sin \lambda \cos C - \sin C \cos \lambda) \sin \alpha}{\cos C}$$

sive $d\alpha = -\frac{20'' \sin \alpha}{\cos C \cos \delta} \sin (\lambda - C)$

$= -20'' \sin \alpha \sec C \sec \delta \sin (\lambda - C)$

Hoc igitur modo, cognito semel angulo C ex formula (37) pro aberratione stellae in ascensionem rectam, admodum concinnam nacti sumus expressionem, quae quolibet casu, cum ex meris constet factoribus, per logarithmos potest expediri.

39. Hic vero angulus C ex ſola ſtellae rectaſcenſione $= \alpha$, obliquitateque eclipticae $= \vartheta$ determinatur (37) adeoque pro qualibet ſtella ſeorſim poteſt computari, ſemel vero computatus, conſtantem quaſi exhibet valorem qui computum aberrationis ſtellae in aſcenſionem rectam, pro quovis loco ſolis in ecliptica ſive potius telluris in orbita ſua, admodum facilitat. Facile autem apparet caſu quo ſit $\lambda = C$, evanituram eſſe aberrationem in aſcenſionem rectam, ſive fore $d\alpha = 0$, adeoque angulum C, ex formula

$$\text{tang } C = -\cos \vartheta \cot \alpha$$

determinatum, deſignare eam ſolis longitudinem, pro qua aberratió in aſcenſionem rectam ſtellae in nihilum abeat.

40. Eodem modo quaero longitudinem ſolis pro qua aberratio ſtellae in declinationem (36. II) evaneſceret. Hoc eveniet ſi ponamus ibidem

$$(\sin \vartheta \cos \delta - \sin \delta \cos \vartheta \sin \alpha) \cos \lambda + \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda = 0$$

adeoque

$$\text{tang } \lambda = \frac{\cos \vartheta \sin \alpha \sin \delta - \sin \vartheta \cos \delta}{\cos \alpha \sin \delta}$$

$$= \cos \vartheta \text{ tang } \alpha - \sin \vartheta \cot \delta \sec \alpha$$

Poſita igitur longitudine ſolis hoc caſu $= F$ ita ut ſit quaerendus angulus F cuius tang $= \cos \vartheta \text{ tang } \alpha - \sin \vartheta \cot \delta \sec \alpha$, ex ſola declinatione et rectaſcenſione ſtellae innotescens, haec quantitas conſtans F ſimili modo computum aberrationis ſtellae ſublevabit, habemus enim

$$\cos \alpha \sin \delta \text{ tang } F = \cos \vartheta \sin \alpha \sin \delta - \sin \vartheta \cos \delta$$

et conſequenter, hoc valore in formulam (36. II) illato,

$$d\delta = + 20'' \cos \alpha \sin \delta \text{ tang } F \cos \lambda - 20'' \cos \alpha \sin \delta \sin \lambda$$

ſive $d\delta = 20'' \frac{\cos \alpha \sin \delta}{\cos F} (\sin F \cos \lambda - \sin \lambda \cos F)$

$$= -20'' \cos \alpha \sin \delta \sec F \sin (\lambda - F)$$

quae igitur formula iterum ſatis eſt concinna, et logarithmis poteſt computari.

41. In-

41. Interim ad faciliorem computum huius anguli F; ſequentia adhuc ſeſe offerunt. Queratur arcus = G, cuius tangens ſit = tang ϑ cot δ ſec α, logarithmis computanda, eoque invento, facile deducetur, fore

$$\text{tang } F = \frac{\text{ſin}(\alpha - G)\ \text{cof}\,\vartheta}{\text{cof}\,\alpha\ \text{cof}\,G} = \text{ſin}(\alpha - G)\ \text{cof}\,\vartheta\ \text{ſec}\,\alpha\ \text{ſec}\,G$$

42. Ponamus igitur brevitatis gratia (37)

$$20'' \text{ ſin } \alpha \text{ ſec C ſec } \delta = A''$$

et (40) $$20'' \text{ cof } \alpha \text{ ſec F ſin } \delta = B''$$

hae quantitates A'' et B'', a ſolis longitudine λ erunt independentes, pro ſtella vero data, exhibent factores conſtantes, ex rectaſcenſione et declinatione eiusdem computandos; quibus igitur computatis, cognitisque ſimul quantitatibus C et F, pro data ſtella itidem conſtantibus, cuilibet longitudini ſolis = λ, ſive telluris loco in orbita ſua = $180° + \lambda$, reſpondebit ſtellae

$$\text{aberrat. in rectaſc.} = -A'' \text{ ſin } (\lambda - C)$$
$$\text{in declin.} = -B'' \text{ ſin } (\lambda - F).$$

43. Formam huius calculi, exemplo iam declaraſſe iuvabit. Computandae igitur ſint aberrationes ſtellae $\beta\Upsilon$ tam in aſcenſionem quam in declinationem eius, et quidem pro anno 1780, exiſtente ſolis longitudine $\lambda = 30°$.

Eritque ex ephemeridibus berolinenſibus

aſcenſio recta $\beta\Upsilon = \alpha = 25°.\ 37'.\ 40''$
declinatio $= \delta = 19°.\ 43'.\ 37''$ bor.
obliquitas eclipt. $= \vartheta = 23°.\ 28'.$

Hinc, neglectis minutis ſecundis, quod ſemper licebit, ſumtisque duntaxat quatuor decimalibus in quolibet logarithmo, hoc genere calculi plerumque ſufficientibus, computus ita ſe habebit.

Pro angulo C eſt; log cof ϑ = 9,9625 — 10
log cot α = 0,3492
log tang C = 0,2817
C = 62°.24′

quia vero tangens huius anguli eſt negativa, (39) vel debet ſumi E = 180° — 62° 24′, vel poteſt quoque ipſe angulus negativus poni, ſive C = — 62° 24. quae poſterior expreſſio in continuatione calculi commodior videtur, ſi modo ex trigonometria conſtet, quibus ſignis hoc caſu lineae trigonometricae anguli negativi afficiantur. Cum in formula pro valore ipſius A′′ occurrat $\text{sec } C = \frac{1}{\text{cof } C}$ ob coſinus angulorum negativorum poſitivos, ſecans quoque anguli negativi C, poſitiva erit, ſcilicet sec. — C = sec. C. Quapropter iam erit porro ob $\lambda - C = 30° + 62° 24$; *pro aberratione ipſa*,

log ſin α = 9,6358 — 10
log ſec C = 0,3341
log ſec ϑ = 0,0262
log 20 = 0,3010

hinc log A′′ = 1,2971 = log 19′′,82; et A′′ = + 19′′,82
log ſin $(\lambda - C)$ = 9,9997 — 10
1,2967
hinc A′′ ſin $(\lambda - C)$ = + 19′′,80

ideoque *aberratio in rectaſcenſionem* = — 19′′, 80 (42) = $d\alpha$ (32) ita ut ſit rectaſcenſio ſtellae viſa, ſeu aberratione affecta = A = $\alpha + d\alpha$ (42)
= 25°. 37′. 40′′ — 19′′,80
= 25°. 37′. 20′′,20

144. *Pro*

44. *Pro aberratione in declinationem* habemus (41)

$$\begin{array}{ll} \log \text{tang } \vartheta = & 9{,}6376 - 10 \\ \log \text{cot } \delta = & 0{,}4456 \\ \log \text{sec } \alpha = & 0{,}0449 \\ \hline \text{hinc} \quad \log \text{tang } G = & 10{,}1281 \end{array}$$

et $G = 53^\circ 20'$

adeoque $\alpha - G = 25^\circ.37' - 53^\circ.20' = -27.^\circ 43'$ qui angulus cum sit negativus, eius quoque sinus negativus erit, hinc quoque angulus F (41) ob $\sin(\alpha - G)$ negativus evadet:

$$\begin{array}{ll} \log \sin(\alpha - G) = & 9{,}6673 - 10 \\ \log \cos \vartheta = & 9{,}9625 - 10 \\ \log \sec \alpha = & 0{,}0449 \\ \log \sec G = & 0{,}2239 \\ \hline \text{adeoque l. tang F} = & 9{,}8986 \\ F = & -38^\circ.22' \end{array}$$

hinc sec F erit positiva ut in (41) secans anguli C. Ob $\lambda - F$ vero $= 30^\circ + 38^\circ.22' = 68^\circ,22'$ habemus porro

$$\begin{array}{ll} \log 20 = & 1{,}3010 \\ \log \cos \alpha = & 9{,}9550 - 10 \\ \log \sin \delta = & 9{,}8281 - 10 \\ \log \sec F = & 0{,}1056 \\ \hline \text{hinc l. B''} = & 0{,}3897 \end{array}$$

et $B'' = +7'',76$

$$\begin{array}{ll} \text{l. sin}(\lambda - F) = & 9{,}9682 - 10 \\ \hline \text{l. B''} \sin(\lambda - F) = & 0{,}8579 \end{array}$$

$B'' \sin(\lambda - F) = 7'',21$

Erit igitur aberratio in declinationem sive $d\delta = -B'' \sin(\lambda - F)$ (42) $= -7'',21$ sive

declinatio stellae $\beta\Upsilon$ apparens $= 19^\circ.43'.37'' - 7'',21$
$= 19^\circ.43'.29'',79$ bor.

45. Pro stella igitur $\beta\Upsilon$ invenimus quantitates constantes

$$\begin{array}{ll} C = & -62^\circ.24' \\ A'' = & +19'',82 \\ F = & -38^\circ.22' \\ B'' = & +7'',76 \end{array}$$

quibus

quibus ergo ſemel repertis, cuilibet ſolis longitudini = λ, reſpondebit

Stellae $\beta\Upsilon$ *aberr. in aſcenſ. rect.* $= d\alpha = -19'',82 \sin(\lambda + 62°.24')$
aberr. in declin. $= d\delta = -7'',76 \sin(\lambda + 38°.22')$

quae ob logarithmos conſtantes ipſarum coefficientium $19'',82$; et $7'',76$, quovis caſu oblato admodum facile logarithmis computantur.

Corollaria.

46. I. Aberratio in aſcenſionem rectam erit maxima, caſu quo ſin $(\lambda - C)$ ſit $= +1$; ergo $\lambda - C = 90°$, ſive $\lambda - C = 270°$, h. e. ſeu $\lambda = 90° + C$ ſeu $\lambda = 270° + C$. Priori caſu ubi ſit longitudo ſolis $\lambda = 90° + C$ erit aberratio *maxima negativa* $= -A''$, poſteriori autem quo ſit $\lambda = 270° + C$ erit aberratio *maxima poſitiva* $= +A''$.

II. Eodem modo aberratio *maxima* in declinationem erit $= -B''$ ſi ſit longitudo $\odot = 90° + F$; poſitiva autem $= +B$ ſi ſit $\lambda = 270° + F$.

III. Aberratio in aſcenſionem rectam erit $= 0$ ſi ſit ſeu $\lambda - C = 180°$ ſive $= 360°$, h. e. longitudo ſolis λ vel $= 180° + C$, vel $= 360° + C$.

Prior Solis longitudo $= 180° + C$ denotabit eam, ubi aberrationes negativae deſinunt (46. I) et incipiunt fieri poſitivae; Poſterior autem $\lambda = 360° + C$ eam deſignabit ſolis longitudinem pro qua aberrationes poſitivae evaneſcunt, et in negativas tranſire incipiunt.

IV. Simili modo pro longitudine Solis $= 180° + F$ aberrationes negativae in declinationem ſtellae, ſunt evaniturae, et deinceps in poſitivos abiturae, pro ſolis vero longitudine

$= 360° + F$ desinent aberrationes hae positivae, et in negativas transire incipient.

V. Sic pro stella $\beta\Upsilon$, pro qua invenimus $C = -62°, 24'$, aberrationes in ascensionem rectam *positivae* incipiunt existente $\lambda = 180° + C = 180° - 62° 24' = 117°. 36' = 3^s. 27°. 36^I$, *negativae* incipiunt existente, $\lambda = 360° + C = 360° - 62°. 24' = 297°. 36' = 9^s. 27°. 36'$; pro aberratione *maxima* positiva est $\lambda = 270° + C = 270° - 62°. 24' = 6^s. 27°. 36^I$. pro aberratione vero maxima *negativa* est $\lambda = 90° + C = 27°. 36^I. = 0^s. 27°. 36^I$. unde igitur apparet has quatuor solis longitudines

$\lambda = 3^s. 27°. 36'$ pro qua sit aberratio in rect. $= 0$
$\lambda = 6. 27. 36$ - - - - - - - $=$ max posit.
$\lambda = 9. 27. 36$ - - - - - - - $= 0$
$\lambda = 0. 27. 36$ - - - - - - - $=$ max. neg.

semper tribus signis a se invicem distare.

VI. Simili modo aberrationes in declinationem stellae $\beta\Upsilon$, pro qua invenimus $F = -38°. 22'$, evanescent, vel fiunt maximae, existentibus Solis longitudinibus, uti sequitur.

Pro $\lambda = 4^s. 21°. 38'$ aberr. in decl. fit $= 0$
$\lambda = 7. 21. 38$ - - - - $=$ max. posit.
$\lambda = 10. 21. 38$ - - - - $= 0$
$\lambda = 1. 21. 38$ - - - - $=$ max. neg.

VII. Ex omnibus hactenus dictis id denique consequitur, quod pro computu aberrationum stellarum, cuilibet solis longitudini respondentium, in formulis (42) necesse sit, scire valores A'', B'', sive aberrationes *maximas* stellarum (46. I. II.) et deinceps valores constantium C et F, sive etiam longitudinum Solis $180° + C$, et $180° + F$, pro quibus aberrationes evanescunt, et incipiunt fieri positivae,

vel potius *additivae*. His quantitatibus pro qualibet ſtella fixa ſemel computatis, deinceps ope formularum (42) pro quolibet alio loco ſolis = λ, aberrationes calculo admodum facili reperiuntur.

Has vero quantitates A'', B'', $180° + C$, et $180° + F$, pro numero 280 fixarum in ephemeridibus berolinenſibus ad annum 1776 iam computatas deprehendimus. Quapropter caſu quodam oblato, has ad calculum aberrationum neceſſarias quantitates ex libro citato duntaxat excerpere, et ut inveniantur C et F, ab argumentis aberrationum, ut ibi vocantur arcus $180° + C$, et $180° + F$, duntaxat ſex ſigna ſive 180° debemus detrahere. Sic pro ſtella *Aldebaran* vocata reperimus ibidem pag. 106,

aberrationem maximam in rectaſc. = 20″,8
- - - - - - - - declinat. = 3″,8
argumentum aberrationis in rectaſc. ſive meum $180° + C = 5^s.7°.35'$
- - - - - - declin. ſive meum $180° + F = 4^s.6.49$
Hinc erit meum $C = 5^s.7°.35' - 6^s = -0^s.22°.25'$
$F = 4^s.6°.49' - 6^s = -1.23.11$
$= -53°.11'$.

Quapropter pro qualibet longitudine ſolis = λ, erit (42.)

Aldebar. aberr. in rectaſc. = − 20″,8 ſin $(\lambda + 22°.25')$
in declin. = − 3″,8 ſin $(\lambda + 53°.11')$

ſic pro aliis ſtellis.

47. Sed haec de ſtellarum aberrationibus ſufficiant. Id tantum adhuc monuiſſe iuvabit, valores ipſarum A'', B'', C, F; cum pendeant a ſtellarum rectaſcenſionibus et declinationibus, ſupra quidem dictos eſſe conſtantes; revera autem temporis decurſu paululum variari, exinde patet, quod non modo rectaſcenſiones et declinationes ſtellarum praeceſſione aequi-

aequinoctiorum afficiantur, sed quoque obliquitas Eclipticae haud omnino constans sit deprehensa. Interim tamen hae mutationes unius saltem seculi spatio tam parum valores ipsarum A'', B'', C, F afficient, ut sine errore sensibili liceat, eosdem pro constantibus haberi. Ceterum nec erit difficile, ope differentiationis mutabilitatem harum quantitatum, si aliquando opus esse sit deprehensum, dignoscere, et in computum vocare.

48. Denique haud abs re esse puto, et de solis aberrationibus quaedam subjungere.

I. Cum scilicet sol tamquam stella fixa in ecliptica sita debeat considerari, pro qua sit $\beta = 0$ et elongatio ε (14) itidem $= 0$, solis aberratio in longitudinem ex formula (16. 17) ponendo ibidem ε sive $360^\circ - L + \lambda = 0$ h. e. $L = 360^\circ + \lambda$, fiet $= -20''$, seu locus solis apparens λ semper erit $20''$ minor, loco eiusdem vero λ.

II. Haec vero aberratio in longitudinem constans, inaequaliter tamen aberrationem solis iuxta ascensionem eius rectam et declinationem afficiet. Si scilicet sit

longitudo ☉	vera	$= \lambda$
declinatio	vera	$= \delta$
	visa	$= D = \delta + d\delta$
rectascens.	vera	$= \alpha$
	visa	$= a = \alpha + d\alpha$
obliquitas eclipt.		$= \vartheta$ ut hactenus

erit ex trigonometria ſphaerica

$$\text{I. } \sin \delta = \sin \vartheta \sin \lambda$$
$$\text{II. } \cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$$
$$\text{III. } \operatorname{tang} \lambda = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\cos \vartheta}$$

III) Hinc ope differentiationis ut ſupra

$$d\delta \cos \delta = \sin \vartheta \cos \lambda \cdot d\lambda$$

ſive ob $\cos \lambda = \cos \alpha \cos \delta$,

$$d\delta = \sin \vartheta \cos \alpha \cdot d\lambda$$

ſeu ob $d\lambda = -20''$ (IV, aberratio ſolis in declinationem erit $d\delta = -20'' \sin \vartheta \cos \alpha$; ſeu ob $\sin \vartheta = 0{,}398$

$$d\delta = -20''. 0{,}398 . \cos \alpha = -7'',96 . \cos \alpha$$

Hinc $D = \delta - 7'',96 . \cos \alpha$.

IV) Porro tertiam aquationem (III) differentiando, habemus

$$\frac{d\lambda}{\cos \lambda^2} = \frac{d\alpha}{\cos \alpha^2 \cos \vartheta}; \text{ adeoque}$$

$$d\alpha = \frac{\cos \alpha^2}{\cos \lambda^2} \cos \vartheta \cdot d\lambda$$

$$= \frac{\cos \vartheta}{\cos \delta^2} \cdot d\lambda = -20'' \cos \vartheta \cdot \sec \delta^2$$

$$= -20''. 0{,}917. \sec \delta^2$$
$$= -18'',34. \sec \delta^2$$

et hinc $a = \alpha - 18'',34. \sec \delta^2$.

quae formulae, ſi neceſſe eſſe cenſeatur, facile poſſunt in tabulas redigi.

Hisce jam sub aditum muneris, quo matheſin et phyſicam in hac litterarum universitate docere, a Sereniſſimo PRINCIPE AC DOMINO CHRISTIANO FRIDERICO CAROLO ALEXANDRO, MARGGRAVIO BRANDENBVRGICO etc. PATRE PATRIAE INDVLGENTISSIMO benigniſſime juſſus ſum, pertractatis, reſtat ut adhuc oratione publica dicam, quam laetiſſimus exultet animus, hoc ſuavi mihi demandato officio fungi, quantaque pietate ſingularem OPTIMI PRINCIPIS indulgentiam veneretur atque colat. Dictus eſt huic orationi dies 12 Aprilis. Quapropter MAGNIFICVM ACADEMIAE PRORECTOREM, COMITES ILLVSTRISSIMOS, PROCANCELLARIVM ILLVSTREM, DIVINARVM HVMANARVMQVE LITTERARVM PROFESSORES AC DOCTORES ERVDITISSIMOS, CELEBERRIMOS, COMMILITONES DENIQVE NATALIBVS ET INGENIO NOBILISSIMOS GENEROSISSIMOSQVE, ut favoris ſui in me teſtimonium praeſentia ſua edere dignentur, ea qua par eſt obſervantia, oro rogoque. Dabam Erlangae menſe Aprilis CIↃ IↃ CCLXXXVII.